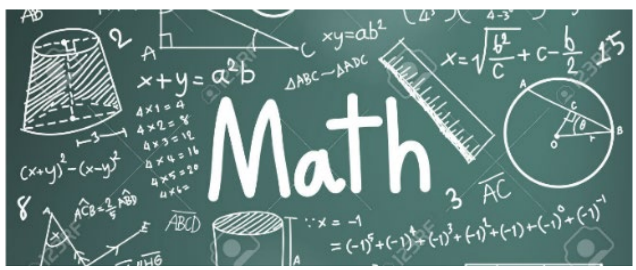
UNIUNEA EUROPEANĂ

Instrumente Structurale
2014-2020

# COMPETENȚE DE BAZĂ DE MATEMATICĂ, ȘTIINȚE ȘI TEHNOLOGII




Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

# MODUL 1. COMPETENȚE DE BAZĂ DE MATEMATICĂ

## Introducere

Competenţa matematică este abilitatea de a dezvolta şi a aplica gândirea matematică pentru rezolvarea diferitor probleme în situaţii cotidiene, accentul punându-se pe proces, activitate şi cunoştinţe. Competenţele de bază privind ştiinţa şi tehnologia se referă la stăpânirea, utilizarea şi aplicarea cunoştinţelor şi a metodologiilor de explicare a lumii înconjurătoare. Acestea implică o înţelegere a schimbărilor cauzate de activitatea umană şi a responsabilităţii fiecărui individ în calitate de cetăţean.

In încercarea de a dezvolta competențe în ceea ce privește lucrul cu elemente de bază matematice, accentul trebuie să cadă pe procesul în sine, pe activitate, precum și pe cunoaștere.

Competența matematică implică, în diferite grade, capacitatea și disponibilitatea de a folosi tipuri de gândire matematică (gândire logică și spațială) și modalități de prezentare (formule, modele, construcții, grafice, scheme), conștientizarea întrebărilor la care matematica poate oferi răspunsuri.

Individul trebuie să posede deprinderi de a aplica principii și procese matematice de bază în situații de zi cu zi, la locul de muncă, acasă, să urmărească și să aprecieze înlănțuiri de argumente. Individul trebuie să fie capabil să raționeze matematic, să înțeleagă dovezile matematice, să comunice în limbaj matematic, să folosească instrumente ajutătoare adecvate.

O atitudine pozitivă în matematică se bazează pe respectarea adevărului și disponibilitatea de a descoperi cauze și de a aprecia validitatea lor.

Indiferent de modalitatea de abordare şi de clasificare a competenţelor, competenţa cheie matematică apare ca fiind de o importanţă crucială, atât pentru dezvoltarea personală armonioasă, cât şi pentru cariera viitoare. De aceea, cum este de aşteptat, în documentele Uniunii Europene competenţa cheie matematică apare în acest moment ca o competenţă indispensabilă oricărei persoane care doreşte să se integreze în societate. Această competenţă este definită prin: cunoştinţe, deprinderi şi atitudini. Reprezentările matematice la care se face referire în documente, sunt de diverse tipuri: formule, modele, construcţii, grafice, hărţi ş.a.m.d.

Recomandarea Parlamentului European şi a Consiliului Uniunii Europene privind competenţele cheie din perspectiva învăţării pe parcursul întregii vieţi (2006/962/EC) – document european de document european de referinţă QUALVET@RO, constituie un instrument de referinţă european pentru decidenţi, furnizorii de educaţie şi formare, angajatori, susţine necesitatea unui set de competenţe care să permită fiecărui cetăţean să se adapteze în mod flexibil la o lume caracterizată prin schimbare rapidă şi profundă interconectare.

Printre competențele cheie pentru învățarea de-a lungul întregii vieți este competența matematică, stiințe și tehnologii.

# Cap. 1 NUMERE ÎNTREGI: SISTEME DE NUMERAȚIE ȘI SENSUL NUMERELOR

## 1.1. Introducere şi operaţii de bază

Numerele întregi îşi au originea în cuvintele folosite pentru a număra obiecte, începând cu numărul 1. Mult mai târziu, a fost făcut un avans în abstractizare prin dezvoltarea ideii de zero ca fiind un număr cu propria sa cifră.

Mulţimea numerelor naturale se notează cu N şi conţine următoarele numere:

N = {0,1,2,3,4,5…}

Operaţia de bază pe această mulţime de numere este adunarea, notată cu simbolul "+". Fiecare număr natural poate fi obţinut din numărul natural precedent prin adunare cu 1, cu excepţia primului număr natural 0.

Exemplu de adunare x + y = z

Adunarea a două numere reprezintă de fapt numărarea a două seturi de obiecte. Regulile adunării sunt bazate pe adunări între primele 10 numere naturale, cunoscute şi sub numele de cifre.

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Adunarea a două numere reprezintă de fapt numărarea a două seturi de obiecte. Regulile adunării sunt bazate pe adunări între primele 10 numere naturale, cunoscute şi sub numele de cifre.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | + |
| 2 | 3 | |
| 1+2+1=4 | 8+3=11 | |
| 4 | 1 | |

A doua operaţie de bază pe mulţimea numerelor naturale este scăderea, opusul adunării, ce constă în înlăturarea unui număr de obiecte şi numărarea obiectelor rămase. Pentru numerele naturale, numărul de obiecte înlăturate trebuie să fie întotdeauna mai mic sau egal cu numărul iniţial de obiecte.

Ca exemplu: 9 – 6 = 3

După cum se observă, dacă adunăm rezultatul la scăzător, obţinem numărul iniţial: 3+6=9, iar aceasta este metoda uzuală de verificare în cazul scăderii.

Dacă vrem să scădem numere care nu sunt cifre, se aplică o regulă similară cu cea de la adunare. Acum, în loc sa mutăm transportul la stânga, scădem unu dacă scăzătorul este mai mare decât descăzutul. Să aruncam o privire la exemplele următoare.

Primul exemplu este destul de simplu şi toate cifrele sunt scăzute cu uşurinţă.

Cel de-al doilea arată puţin diferit şi este un bun exemplu al regulii descrise mai sus.

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 3 | - |
| 2 | 1 | |
| 5-2=3 | 3-1=2 | |
| 3 | 2 | |
| 5 | 1 | - |
| 2 | 8 | |
| (5-1)-2=2 | 11-8=3 | |
| 2 | 3 | |

Pentru că am scăzut o unitate din 5, scăderea la stânga este 4 – 2 = 2.

În continuare, vom face tranziția la următoarea operație între numerele naturale, şi anume înmulţirea, notată cu "x" sau "·".

Înmulţirea este adunarea repetată a aceluiaşi număr. De exemplu, în loc să scriem:

5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 10 + 10 + 5 = 20 + 5 = 25

putem scrie: 5 x 5 = 25 adică cinci înmulțit cu cinci este egal cu douăzeci și cinci.

Când înmulţim numere cu mai mult de o cifră, se aplică aceleaşi reguli ca la adunare: se scrie doar ultima cifră, transportul se mută la stânga şi adăugat la rezultatul înmulţirii.

Fiecare cifră este înmulțită cu cifrele de mai jos, de la stânga la dreapta. Iată un exemplu în care cel de-al doilea număr are doar o cifră:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | x |
| | 7 | |
| 1x7+2=9 | 3x7=21 | |
| 9 | 1 | |

Dacă cel de-al doilea număr are două cifre, se repetă aceleaşi operaţii, iar rezultatul este mutat cu o poziţie la stânga, ca în exemplul de mai jos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | x |
| | 2 | 7 | |
| | 1x7+2=9 | 3x7=21 | |
| 1x2=2 | 3x2=6 | | |
| 2+1=3 | 9+6=15 | 1 | |

Se notează faptul că orice număr înmulţit cu 0 face 0, iar orice număr înmulţit cu 1 este chiar numărul. Înmulţirea cu 10 adaugă un 0 la sfârşit

Ca şi în cazul operaţiei "+", există o operaţie opusă înmulţirii, şi anume împărţirea, notată cu "÷" sau ":". Legătura între aceste două operaţii se poate observa în propoziţia următoare:

Dacă 3×5=15, atunci 15:5=3

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Cu alte cuvinte, dacă înmulţim un număr cu un numar „*n*” şi apoi împărţim rezultatul la „*n*”, obţinem numărul iniţial. Exemplele următoare ilustrează cum se împart două numere care au mai mult decât o cifră:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 1 | ÷ | 3 | | |
| 3=3x1 | | | | 1 | 1 | 7 |
| = | 5 | - | | | | |
| | 3=3x1 | | | | | |
| | 2 | 1 | - | | | |
| | 2 | 1 | =3x7 | | | |
| | = | = | | | | |

## 1.2. Ordinea operaţiilor

În cazul în care dorim să evaluăm o expresie mai complicată, cum ar fi:
1 + 2 x 3 + 4 x 5 + 6 : 3

trebuie să stabilim o ordine în care se efectuează operaţiile. Ordinea normală este să evaluăm mai întâi înmulţirile şi împărţirile şi numai apoi adunările şi scăderile. Deci expresia de mai sus se calculează:
1 + 2 x 3 + 4 x 5 + 6 : 3 = 1 + 6 + 20+ 2 = 7 + 22 = 29

Pentru a grupa operaţiile în diferite moduri, putem de asemenea utiliza paranteze, caz în care se evaluează mai întâi ce este inăuntrul parantezelor:
23 + (13 + 31 ) x 2 + 15 : (13 - 8) = 23 + 44 x 2 + 15 : 5= 23 + 88 + 3 = 144

Parantezele pot fi imbricate, iar în acest caz calculăm paranteza cea mai din interior şi aşa mai departe:
(( 12 + 3) – 3 x 4 ) : 3 = ( 15 – 3 x 4) : 3 = (15 – 12) : 3 = 3 : 3 = 1

Când lucrăm cu paranteze există câteva reguli de bază care ne permit sa le eliminăm în timpul calculului, şi anume distributivitatea:
4 x ( 12 + 2) = 4 x 12 + 4 x 2

În general, se aplică următoarele reguli, unde a, b, c, sunt numere naturale:
a x (b + c ) = a x b + a x c
a x (b - c ) = a x b - a x c

## 1.3. Reprezentarea numerelor naturale

În cele ce urmează vom ilustra modul în care numerele naturale pot fi reprezentate pe o linie dreaptă.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 a
a+1

Mai intâi reprezentăm numărul 0, apoi alegem un sement scurt numit unitate de măsură și poziționăm numărul următor: 1. Fiecare dintre numerele naturale următoare este reprezentat prin deplasare la dreapta cu o unitate de masură. Nu există o limită la dreapta, deaoarece există întotdeauna un număr mai mare decât orice număr natural, obținut prin adunare cu 1.

Se poate defini o relație între două numere naturale, specificând care este mai mare sau mai mic, în funcție de poziția celor două numere în reprezentarea pe axă. Dacă un număr este situat la stânga altui număr, înseamnă că este mai mic, altfel, dacă este poziționat la dreapta, este mai mare.

Scrierea numerelor în baza 10 (sistemul zecimal) înseamnă că poziția pe care o are fiecare cifră într-un număr are o anumită semnificație și un nume. Pentru a stabili numele și semnificația fiecărei cifre dintr-un număr natural, acestea se grupează câte trei, de la dreapta la stânga. Primele nouă poziții ale cifrelor, de la dreapta la stânga, sunt: unități, zeci, sute, mii (unități de mii), zeci de mii, sute de mii, milioane (unități de milioane), zeci de milioane, sute de milioane.

| | clasa milioanelor | | | clasa miilor | | | clasa unităților | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | sute de milioane | zeci de milioane | unități de milioane | sute de mii | zeci de mii | unități de mii | sute | zeci | unități |

Fiecare poziție, începând de la dreapta la stânga, este de 10 ori mai mică decât poziția următoare. Asta înseamnă că 10 unități formează o zece, 10 zeci formează o sută, 10 sute formează o mie, etc.

De exemplu 5 este mai mare decat 3, și putem scrie
$5 > 3$

În același mod putem afirma că 1 este mai mic decât 7, și putem scrie
$1 < 7$

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Un alt mod de a descrie relația dintre două numere este următorul: numărul natural *a* este mai mic decât *b* dacă există un numar natural *c* astfel încât:

b = a + c,

adică trebuie să adăugam ceva la *a* pentru a ajunge la *b*.

## 1.4. Compararea și ordonarea numerelor naturale

| Simbol | Cum citim | Exemple |
|---|---|---|
| $=$ | egal | $1 + 9 = 10$ ; $23 = 23$ |
| $\neq$ | diferit | $12 \neq 10$ ; $3 \cdot 4 \neq 14$ |
| $<$ | mai mic | $42 < 100$ ; $a < 3$, a nr. natural înseamnă că a poate fi 0, 1, 2 |
| $>$ | mai mare | $11 > 6$ ; $5 > a > 3$, a nr. natural înseamnă că a este numărul 4 |
| $\leq$ | mai mic sau egal | $a \leq 3$, a nr. natural înseamnă că a poate fi 0, 1, 2, 3 |
| $\geq$ | mai mare sau egal | $5 \geq a \geq 3$, a nr. natural înseamnă că a poate fi 3, 4, 5 |

Numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 100, 101, 102, ... scrise în această ordine, formează <u>șirul numerelor naturale</u>. În acest șir, fiecare număr este format din numărul dinaintea lui la care se adaugă o unitate (adică este numărul dinainte plus 1). Asta înseamnă că un număr oarecare de pe <u>axa numerelor</u> este mai mic decât oricare dintre numerele aflate la dreapta lui pe axă și este mai mare decât oricare dintre numerele aflate la stânga lui pe axă.

De exemplu, numărul 5 este înaintea numărului 100 în șirul numerelor naturale. Asta înseamnă că 5 este mai mic decât 100. Matematic, vom scrie:

$5 < 100$

și vom citi „5 este mai mic decât 100”. Asta înseamnă și că 100 este mai mare decât 5. Deci putem să mai scriem și astfel:

$100 > 5$

(vom citi „100 este mai mare decât 5”).

Semnul „<” înseamnă „mai mic decât”; semnul „>” înseamnă „mai mare decât”. Partea ascuțită este către numărul mai mic, iar deschiderea este către numărul mai mare.

# 1.5. Numere întregi

Observăm că atunci când scădem, primul număr trebuie să fie întotdeauna mai mare decât cel de-al doilea. Dacă adunarea înseamnă deplasarea la dreapta pe axa de reprezentare, atunci scăderea înseamnă deplasarea la stânga. Dacă facem o deplasare la stânga cu un număr de unităţi mai mic decât poziţia curentă, obţinem un alt număr natural, care reprezintă rezultatul scăderii.

Ce se va întampla dacă vom continua deplasarea la stânga? Este de la sine înţeles că putem să extindem axa la stânga lui 0, dar nu există numere naturale în acea zonă, aşa că trebuie să definim alt tip de numere. Aceste numere sunt asemănătoare cu numerele naturale, cu excepţia faptului că au un minus la stânga. De exemplu, -1 este numărul obţinut prin deplasarea cu o unitate la stânga lui 0, aşa cum 1 este numărul obţinut din 0, prin deplasarea la dreapta cu o unitate.

... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 ...

Acest lucru se exprima in operatii de baza astfel in mod asemenator observam că:

0 - 1 = - 1

3 – 4 = 1,5 – 6 = – 1

Putem de asemenea defini scăderea între oricare două numere naturale ca scăderea dintre numărul mai mare şi numărul mai mic, în această ordine, cu semnul celui mai mare. De exemplu:

15 – 17 = (17 – 15) = –2

pentru că 17 este mai mare decât 15 şi are semnul minus.

Folosind aceste reguli, operaţiile definite pentru numerele naturale pot fi definite şi pentru numere cu semn, luând în considerare următoarele reguli pentru semn:

-a - b = - (a + b)

-a + b = b – a

a - ( -b ) = a + b

-a x (-b) = a x b

a x (-b) = - (a x b)

-a x b = -(a x b)

În general:

- ( – a ) = a

pentru oricare număr *a*.

La înmulţire, trebuie folosit următorul tabel cu semnele operaţiilor:

| x | + | - |
|---|---|---|
| + | + | - |
| - | - | + |

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Aceleaşi reguli se aplică şi când împărţim două numere cu semn. Acum că am definit numerele cu semn, le putem grupa cu numerele naturale într-un singur set de numere, din moment ce toate operaţiile pot fi efectuate între ele. Această mulţime este mulţimea numerelor întregi, notată cu , where

Z = {.... -5, -4, -3, -2, –1, 0,1,2,3,4,5,6,7,.....}

Relaţiile între întregi sunt asemănătoare cu cele între numerele naturale, adică un număr este mai mic daca este situat la stânga. Ca reguli generale, orice număr negativ (cu semn) este mai mic decât orice număr natural (pozitiv, fară semn), inclusiv 0.

Pentru două numere „a” cu semn (negative), relaţia este următoarea: un număr este mai mic decât un număr dacă primul număr fără semn, este mai mare decât cel de-al doilea număr fără semn. Trebuie notat ca dacă adunăm la număr natural corespondentul său cu semn obţinem 0:

a + (-a ) = a – a = 0

## 1.6. Aproximarea numerelor naturale

De multe ori, nu cunoaștem exact valoarea unui număr, dar putem spune o valoare apropiată de acel număr. De exemplu, nu știm sigur cât costă o bicicletă, dar putem spune că e „vreo 600 de lei” sau „cam 600 de lei”. Atunci când nu știm valoarea reală și considerăm o valoare apropiată de cea reală, spunem că aproximăm.

Aproximarea se poate face prin lipsă sau prin adaos, în funcție de cum vrem să considerăm valoarea apropiată de cea reală: mai mică sau mai mare decât aceasta. Ideea de reținut e că se obține un număr „rotund” (cifra unităților este zero, și nu neapărat doar ea). Aproximarea prin lipsă înseamnă că se scade ceva din numărul dat, iar aproximarea prin adaos înseamnă că se adaugă ceva la numărul respectiv.

aproximarea prin lipsă < numărul dat < aproximarea prin adaos

**<u>a. Aproximarea prin lipsă</u>**

Aproximarea prin lipsă până la zeci înseamnă să găsim cel mai mare număr natural format doar din zeci mai mic decât numărul dat.

Să luăm numărul 3456. Cel mai mare număr natural format doar din zeci, care e totuși mai mic decât 3456 este 3450. Observăm că 3450 <u>este format din 345 de zeci și nicio unitate</u>, deci e format doar din zeci (345 de grupe de câte zece unități și nu mai rămâne nicio unitate). Rezultă că aproximarea prin lipsă până la zeci a numărului 3456 este 3450.

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Câte zeci are numărul 3456? - 345 de zeci și 6 unități. Adică 345 de grupe de câte 10 unități și încă 6 unități. Dacă nu mai ținem seama de cele 6 unități, atunci rămân 345 de zeci, adică 3450. Deci aproximarea prin lipsă până la zeci a numărului 3456 este 3450. Putem gândi și așa.

Aproximarea prin lipsă până la sute înseamnă să găsim cel mai mare număr natural format doar din sute mai mic decât numărul dat. Aproximarea prin lipsă până la sute a lui 3456 este 3400, pentru că 3400 este cel mai mare număr natural format doar din sute care e mai mic decât 3456. Numărul 3400 are 34 de sute, nicio zece și nicio unitate, deci e format doar din sute (34 de grupe de câte o sută de unități și nu mai rămâne nicio unitate).

Aproximarea prin lipsă până la mii înseamnă să găsim cel mai mare număr natural format doar din mii mai mic decât numărul dat. Aproximarea prin lipsă până la mii a lui 3456 este 3000, pentru că 3000 este cel mai mare număr natural format doar din mii, mai mic decât 3456. Numărul 3000 are 3 mii, nicio sută, nicio zece și nicio unitate, deci e format doar din mii.

În mod asemănător se aproximează prin lipsă până la zeci de mii, sute de mii etc, în funcție de câte cifre are numărul și ce aproximare dorim.

**Exemplu nr. 1**

Să scriem aproximările prin lipsă până la zeci, sute și mii ale numărului 378027.

**Răspuns**

Aproximarea prin lipsă până la zeci a numărului 378027 este 378020 (este cel mai mare număr format doar din zeci, mai mic decât 378027). Numărul 378020 are 37802 de zeci și nicio unitate.

Aproximarea prin lipsă până la sute a numărului 378027 este 37800 (este cel mai mare număr fomat doar din sute, mai mic decât 378027). Numărul 37800 are 3780 sute, nicio zece și nicio unitate.

Aproximarea prin lipsă până la mii a numărului 378027 este 378000 (este cel mai mare număr format doar din mii, mai mic decât 378027). Numărul 378000 are 378 de mii, nicio sută, nicio zece și nicio unitate.

**Exemplul nr. 2**

Numărul 700000 este o aproximare a numărului 753204? Dacă da, până la ce ordin (până la zeci, sute, mii, zeci de mii sau sute de mii etc.)?

**Răspuns**

Da, numărul 700000 este o aproximare prin lipsă până la zeci de mii a numărului 753204. Într-adevăr, numărul 700000 este cel mai mare număr natural format doar din zeci de mii (70 de grupe de zece mii), mai mic decât 753204.

- aproximarea prin lipsă până la zeci are ultima cifră - cea a unităților - egală cu 0;
- aproximarea prin lipsă până la sute are ultimele două cifre egale cu 0 (cifra zecilor și cifra unităților);
- aproximarea prin lipsă până la mii are ultimele trei cifre egale cu 0 (cifra sutelor, a zecilor și a unităților) etc.
- cifra zero poate să fie și pe alte poziții, în funcție de numărul aproximat. Acesta e un mod de a verifica dacă am aproximat corect.

**b. Aproximarea prin adaos (adăugare)**

Aproximarea prin adaos până la zeci înseamnă să găsim cel mai mic număr natural format doar din zeci mai mare decât numărul dat.

Am aproximat prin lipsă numărul 3456. Să-l aproximăm prin adaos acum.

Aproximarea prin adaos până la zeci a numărului 3456 este 3460. Numărul 3456 are 345 de zeci și 6 unități. Când am aproximat prin lipsă, nu am mai ținut seama de cele șase unități care nu formează o zece. Acum, când aproximăm prin adaos, considerăm că e completă și grupa celor 6 unități și o adăugăm la zecile completate, deci se mai adaugă o zece, astfel încât vom avea 346 de zeci, adică 3460.

- aproximarea prin adaos până la zeci a unui număr se obține mărind cu 1 cifra zecilor numărului dat, iar cifra unităților devine 0 (ultima cifră)

Aproximarea prin adaos până la sute înseamnă să găsim cel mai mic număr natural format doar din sute mai mare decât numărul dat.

Aproximarea prin adaos până la sute a numărului 3456 este 3500. Numărul 3456 are 34 de sute și 56 de unități. Deși cele 56 de unități nu formează o sută, noi o vom considera grupă completă și o vom adăugă la cele 34 de sute, deci vom avea 35 de sute, adică 3500. Aceasta este aproximarea prin adaos până la sute a numărului 3456.

- aproximarea prin adaos până la sute a unui număr dat se obține mărind cu 1 cifra sutelor numărului dat, iar cifrele de la dreapta devin 0 (ultimele două cifre)

Aproximarea prin adaos până la mii a numărului 3456 este 4000. Numărul 3456 are 3 grupe de câte o mie de unități și încă 456 de unități pe care le vom considera grupă completă. Deci vom avea 4 mii, adică 4000.

- aproximarea prin adaos până la mii se obține mărind cu 1 cifra miilor numărului dat, iar cifrele de la dreapta devin 0 (ultimele trei cifre)

În mod asemănător se aproximează prin lipsă până la zeci de mii, sute de mii etc, în funcție de câte cifre are numărul și ce aproximare dorim.

**Exemplu**

Să aproximăm prin adaos până la zeci, sute și mii numărul 22462.

**Răspuns**

Aproximarea prin adaos până la zeci a numărului 22462 este 22470 (este cel mai mic număr format doar din zeci, mai mare decât 22462). Numărul 22470 are 2247 de zeci și nicio unitate, deci e format doar din zeci.

Aproximarea prin adaos până la sute a numărului 22462 este 22500 (este cel mai mic număr fomat doar din sute, mai mare decât 22462). Numărul 22462 are 224 de grupe de câte 100 de unități și încă 62 de unități. Considerăm că aceste 62 de unități formează și ele o grupă completă de 100 de unități și o vom adăuga la celelalte 224 de grupe, deci vom obține 225 de sute, adică 22500. Deci 22500 este aproximarea prin adaos până la sute a numărului 22462.

Aproximarea prin adaos până la mii a numărului 22462 este 23000 (este cel mai mic număr format doar din mii, mai mare decât 22462). Numărul 22462 are 22 de mii și o grup incompletă,

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

doar cu 462 de unități; deși e incompletă, deoarece aproximăm prin adaos, o vom adăuga și pe ea celor 22 de mii complete, deci vom avea 23 de mii, adică 23000 - aceasta e aproximarea prin adaos până la mii a numărului 22462.

**c. Rotunjiri**

Rotunjirea până la zeci, sute sau mii a unui număr este aproximarea (prin lipsă sau prin adaos) care e cea mai apropiată de numărul dat. Dacă ambele aproximări sunt la fel de apropiate de numărul dat, atunci se va aproxima prin adaos.

Aproximările prin lipsă și adaos până la zeci (sute, mii) sunt la fel de apropiate de numărul aproximat dacă cifra unităților (zecilor, sutelor) numărului dat e 5. În acest caz, rotunjirea până la zeci este aproximarea prin adaos până la zeci (sute, mii).

**Exemplu:**

Să rotunjim numărul 2017 la zeci, sute și mii.

**Răspuns:**

Rotunjirea până la zeci este aproximarea prin adaos până la zeci, adică 2020. Aproximarea prin lipsă până la zeci este 2010; 2020 este mai apropiat de 2017 decât 2010, deci alegem aproximarea prin adaos.

Rotunjirea până la sute este aproximarea prin lipsă până la sute, adică 2000. Aproximarea prin adaos până la sute este 2100; numărul 2017 este mai apropiat de 2000 decât de 2100, deci alegem aproximarea prin lipsă.

Rotunjirea până la mii este aproximarea prin lipsă până la mii, adică 2000. Aproximarea prin adaos până la mii este 3000; numărul 2017 este mai apropiat de 2000 decât de 3000, deci alegem aproximarea prin lipsă.

**d. Estimări**

Estimarea este o apreciere, o evaluare a unei situații, având date incomplete, insuficiente.

**Exemple:**

Estimez că numărul microbilor din corpul unui om este de ordinul miliardelor.
Estimez că înălțimea unui copac este de 20 m, fără să o măsor, doar privind.
Estimez că distanța de acasă până la școală e de 3 km.

## 1.7. Divizibilitatea numerelor naturale

Definiție:

*Un număr natural* **a** *este divizibil cu un număr natural* **b** *dacă există un număr natural* **c** *astfel încât:*

a = b x c

Exemplu:

Fie numerele naturale 8 și 2. Există oare un număr natural astfel încât înmulțindu-l cu 2 să obținem 8?

Da. Acest număr este 4. Intr-adevăr: 8 = 2 x 4.

Se mai spune:

*"a se divide cu b", "b divide pe a ", "b este divizor al lui a", "a este multiplu al lui b".*

Dacă *a* și *b* sunt numere naturale, *b* | *a* se citeste *"b divide pe a"* sau 2 | 6.

Definiție:

Fie *a* și *b* doua numere naturale. Spunem că *b* | *a* dacă există un număr natural *c* astfel încât *a* = *b* x *c*.

Observatii:

Nu *orice* număr natural par este divizibil cu 4.

De ex.: 6 nu este divizibil cu 4.

Nu *orice* numar natural de forma 6n – 1, unde n apartine N*, se divide numai cu 1 si cu el insusi.

De ex.: Dacă n = 6, avem 6 x 6 – 1 = 35, iar 35 cu 1, cu 35, cu 5 și cu 7.

**Proprietăți ale divizibilității numerelor naturale:**

(1) Orice număr natural este divizibil cu 1 sau 1 | a oricare ar fi a aparține ℕ.

(2) 0 este divizibil cu orice număr natural sau a | 0, oricare ar fi a aparține ℕ.

(3) Orice numar natural se divide cu el însuși sau a | a, oricare ar fi a aparține ℕ.

(4) Fie a și b doua numere naturale. Dacă *a* este divizibil cu *b* și *b* este divizibil cu *a* atunci *a* = *b* sau dacă *a* | *b* și *b* | *a*, oricare ar fi *a, b* apartine ℕ.

(5) Fie *a, b, c* trei numere naturale. Daca *b* se divide cu *a* iar *c* se divide cu *b* atunci *c* se divide cu *a* sau dacă *a* | *b* și *b* | *c*, atunci *a* | *c*, oricare ar fi *a, b, c*, aparține ℕ. Dacă un număr natural se divide cu nu număr natural, atunci primul se divide cu toți divizorii celui de-al doilea.

(6) Dacă fiecare termen al unei sume de două numere naturale se divide cu un număr natural, atunci și suma lor se divide cu acel număr natural. Dacă un numar natural *a* se divide cu un număr natural *m* și dacă un număr natural *b* se divide cu același număr natural *m*, atunci și suma lor *a* + *b* se divide cu *m* sau dacă *m* | *a* și *m* | *b*, atunci *m* | *a* + *b* oricare ar fi *a, b, m* aparține ℕ.

**Aplicatii practice:**

***Aplicatia nr. 1:***

Sa se efectueze rezolvarea tinad cont de ordinea operatiilor:

1320 + [48 · 23 +(340 · 11 – 60 · 5) – 235 ·7] =

***Aplicatia nr. 2***

Sa se efectueze rezolvarea tinad cont de ordinea operatiilor:

2307 + {3702 + [270: 3 +3 · (280· 5 – 3 · 230)]} =

***Aplicatia nr. 3***

Gasiti pe *a*

a + 45 x 72 – 3 x 255 = 2 495

***Aplicatia nr. 4***

Sa se resolve:

4(2+3):5(1+3) =

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

***Aplicatia nr. 5***
Intr-un autobus erau cativa calatori. La prima statie au coborat 4 si au urcat 6 calatori. La urmatoarea statie au coborat 5 si au urcat 8. Inainte de ultima statie mai erau in autobus 15 calatori.
Cati calatori au fost la inceput in autobus?

***Aplicatia nr. 6***
Determinati toate numerele naturale care impartite la 7 dau catul 12.

***Aplicatia nr. 7***
Ai cules flori, mai putin de 40 de fire, si doresti sa faci buchete. Poti face buchete de 5 sau de 7 flori.
Cate flori ai cules?

***Aplicatia nr. 8***
Scrieti cei mai mici divizori comuni ai numerelor 24 si 28.

***Aplicatia nr. 9***
Un numar este cu 24 mai mare decat altul iar adunate suma lor este 246.
Sa se afle numerele.

## Rezolvare Aplicatii

***Rezolvare aplicație nr. 1***
$1320 + [48 \cdot 23 + (\underline{340 \cdot 11} - \underline{60 \cdot 5}) - 235 \cdot 7] =$
$1320 + [48 \cdot 23 + (\underline{3740 - 300}) - 235 \cdot 7] =$
$1320 + (\underline{48 \cdot 23} + 3440 - \underline{235 \cdot 7}) =$
$1320 + (\underline{1104 + 3440} - 1645) =$
$1320 + (\underline{4544 - 1645}) =$
$1320 + 2899 = 4219$

***Rezolvare aplicație nr. 2***
$2307 + \{3702 + [270 : 3 + 3 \cdot (\underline{280 \cdot 5} - \underline{3 \cdot 230})]\} =$
$2307 + \{3702 + [270 : 3 + 3 \cdot (1400 - 690)]\} =$
$2307 + [3702 + (\underline{270 : 3} + \underline{3 \cdot 710})] =$
$2307 + [3702 + (\underline{90 + 2130})] =$
$2307 + (\underline{3702 + 2220}) =$
$2307 + 5922 = 8229$

***Rezolvare aplicație nr. 3***
$a + 3\,240 - 765 = 2\,495$
$a + 3\,240 = 2\,495 + 765$

a + 3 240 = 3 260
a = 3 260 - 3 240
a = 20

***Rezolvare aplicație nr. 4***
4(2 + 3): 5(1 + 3) =
4 x 5: 5 x 4 =
20: 5 x 4 = 4 x 4 =16

***Rezolvare aplicație nr. 5***
Notam cu z numarul calatorilor la inceput in autobus.
z - 4 + 6 - 5 + 8= 15
a = 15 + 4 - 6 + 5 - 8
a = 10 calatori

***Rezolvare aplicație nr. 6***
$x = 12 \cdot 7 + r,\ r < 7 => r \in (0,1,2,3,4,5,6)$
$x = 12 \cdot 7 + 0 =$ 84
$x = 12 \cdot 7 + 1 =$ 85
$x = 12 \cdot 7 + 2 =$ 86
$x = 12 \cdot 7 + 3 =$ 87
$x = 12 \cdot 7 + 4 =$ 88
$x = 12 \cdot 7 + 5 =$ 89
$x = 12 \cdot 7 + 6 =$ 90

***Rezolvare aplicație nr. 7***
Numarul de aflat este divizibil cu 5 si cu 7
Multipli lui 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35
Multipli lui 7: 7, 14, 21, 28, 35
Numarul care este multiplu si lui 5 si lui 7 este 35
Ai cules 35 de fire.

***Rezolvare aplicație nr. 8***

24|2
12|2
6|2
3|3
1|
Obtinem: $24 = 2^3 \cdot 3 \cdot 1$

28|2
14|2
7|2
1|3
Obtinem: $28 = 2^2 \cdot 7 \cdot 1$

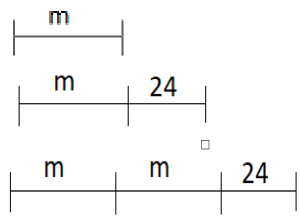
Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

***Rezolvare aplicație nr. 9***

Reprezentam primul numar:

Cel de-al doilea numar:

Suma celor doua numere:




$2m = 246 - 24 \Rightarrow 2m = 222 \Rightarrow m = 111$

# Cap.2 NUMERE FRACȚIONARE OPERAȚII DE BAZĂ CU NUMERE FRACȚIONARE

## 2.1. Introducere și reprezentare

Sa ne amintim că, până acum, am definit mulţimea numerelor întregi ca fiind:
Z = {... -4, -3, -2, -1 ,0,1, 2, 3, 4, 5....}

Pentru aceste numere am definit operaţii cum ar fi adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea. Dintre aceste patru operaţii, împărţirea este singura care nu poate fi efectuată între orice numere întregi.
La împărţirea numerelor întregi ajungem într-o situaţie în care deîmpărţitul nu este divizibil cu împărţitorul, iar algoritmul de împărţire va genera un rest.

De exemplu, dacă încercăm să împărţim 16 la 5 obţinem 3 şi un rest 1. Astfel, avem reprezentarea

$16 = 5\, x\, 3 + 1$

sau, în cazul general *deîmpărțit = împărțitor x cât + rest*

Să ne imaginăm acum că avem un segment de lungime 15 şi îl împărţim în 3. Pentru că 15 se împarte exact la 3, obţinem trei segmente de lungime 5. Dar ce se întâmplă dacă împărţim un segment de 16 cm în 3 porţiuni egale ca lungime? Evident, acest lucru poate fi realizat fizic, dar ce lungime vor avea segmentele? Definim lungimea respectivă folosind notaţia:

$$6 : 3 = \frac{16}{3}$$

În cazul general, pentru oricare două numere întregi, definim

$$p : q = \frac{p}{q} \cdot q \neq 0$$

unde *q* este diferit de 0. Aceste numere, care nu sunt întregi, sunt fracţii ale unor întregi, sau numere fracţionare şi sunt poziţionate pe axă printre numerele întregi, ca în figura de mai jos:

-3 -2 $-\frac{3}{2}$ -1 0 1 2 $\frac{7}{3}$ 3

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Să observăm $\frac{7}{3}$ se află între $2 = 6 \div 3 = \frac{6}{3}$ și $3 = 9 \div 3 = \frac{9}{3}$

Se observă de asemenea că numărul întreg 2 poate fi reprezentat ca un număr fracționar în mai multe moduri: $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ şi acest lucru se aplică oricărui număr fracţionar.

În cazul general

$$\frac{p}{q} = \frac{p \times r}{q \times r},$$

pentru oricare $p, q \neq 0, r \neq 0$ întregi.

Pentru oricare număr fracţionar $\frac{p}{q}$, $p$ se numeşte numărător şi $q$ se numeşte numitor. Oricare două fracţii pot fi aduse la acelaşi numitor, înmulţind numărătorul şi numitorul fiecărei fracţii cu numitorul celeilalte fracţii:

$\frac{p}{q} si \frac{r}{s}$ pot fi scrise ca fiind $\frac{p\,x\,s}{q\,x\,s} si \frac{r\,x\,q}{q\,x\,s}$.

În acest mod putem defini numărul mai mare ca fiind fracţia cu cel mai mare numărător când scriem fracţiile cu numitor comun. De exemplu, să comparăm numerele $\frac{4}{5}$ si $\frac{3}{7}$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35}, \qquad \frac{3}{7} = \frac{3 \times 5}{5 \times 7} = \frac{15}{35}$$

Pentru că 15 este mai mic decât 28 obţinem că $\frac{4}{5}$ este mai mare decât $\frac{3}{7}$ .

## 2.2. Operaţii de bază

Mulţimea numerelor raţionale se notează cu $\mathbb{Q}$ şi conţine toate numerele întregi şi toate fracţiile obţinute prin împărţirea oricăror două numere întregi.

Definim adunarea pe această mulţime în modul următor:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \times s}{q \times s} + \frac{r \times q}{q \times s} = \frac{p \times s + r \times q}{q \times s}$$

De exemplu

$$\frac{11}{3} + \frac{3}{6} = \frac{11 \times 6}{3 \times 6} + \frac{3 \times 3}{6 \times 3} = \frac{66 + 9}{18} = \frac{75}{18}$$

Scăderea este definită într-un mod asemănător

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p \times s}{q \times s} - \frac{r \times q}{q \times s} = \frac{p \times s - r \times q}{q \times s}$$

Înmulţirile urmează modelul de mai jos

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p \times r}{q \times s}$$

ca în exemplul următor

$$\frac{3}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{8 \times 2} = \frac{15}{16}$$

Împărţirile au o formă puţin diferită, deoarece se înlocuiesc cu înmulţirea primei fracţii cu inversa celei de-a doua:

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r} = \frac{p \times s}{q \times r}$$

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Exemplul de mai jos ilustrează că:

$\frac{3}{4} \div \frac{5}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{5} = \frac{3 \times 9}{4 \times 5} = \frac{18}{20}$

## 2.3. Reprezentare zecimală

Am observat anterior că orice număr raţional poate fi reprezentat în mai mult de o formă. Totuşi, există o formă unică pentru fiecare număr raţional. Numerele raţionale au fost introduce ca fiind rezultatul împărţirilor care nu pot fi efectuate exact, din cauza restului. În cele ce urmează vom vedea ce se întâmplă dacă vom continua împărţirea după ce obţinem restul: După ce obţinem 3, care este mai mic decât 15, adăugăm un zero la stânga şi continuăm împărţirea, următoarele cifre din rezultat fiind precedate de o virgulă.

Obţinem, $\frac{123}{15} = 8{,}2$ care este un număr fracţionar între 8 şi 9. Această reprezentare se numeşte reprezentarea zecimală a unui număr raţional. Numărul situat la dreapta virgulei reprezintă cât din împărţitor este restul împărţirii întregi. Ne putem imagina această parte zecimală ca o fracţiune dintr-un întreg. Dacă împărţim 1 la 2, obţinem 0,5, care reprezintă o jumătate din 1, operaţie ce corespunde împărţirii unui segment de lungime 1 în două părţi egale. Acelaşi lucru poate fi spus despre rezultatul împărţirii lui 1 la 4, care este 0,25, adică sfertul unui segment de lungime unu.

0,25 0,5 0,75 1

Putem efectua adunări cu numere raţionale în reprezentare zecimală, ca şi cum am aduna numere întregi, cu excepţia că trebuie să aliniem virgulele corespunzătoare şi să completăm numărul mai scurt cu zerouri terminale, ca în exemplul următor, în care adunăm 12,35 la 1,6:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | , | 3 | 5 |
| | 1 | , | 6 | 0 |
| 1 | 3 | , | 9 | 5 |

Aceeaşi regulă se aplică şi pentru scădere. În cazul înmulţirii, aceasta se efectuează indiferent de virgulă, iar apoi poziţionăm virgula cu *a*+*b* poziţii la stânga, unde *a* este numărul cifrelor de după virgulă al primului număr, iar *b* este numărul cifrelor de după virgulă (al zecimalelor) al celui de-al doilea număr.

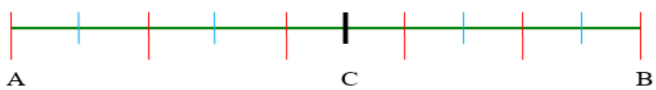
Pentru numerele de mai sus, 12,35 şi 1,6 observăm că primul are 2 zecimale, în vreme ce cel de-al doilea are numai una, astfel rezultatul va avea 3 zecimale, adică 3 cifre după virgulă.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 5 |
| | | | 1 | 6 |
| | 7 | 4 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 5 | |
| 1 | 9 | 7 | 6 | 0 |

Prin înmulţirea numerelor 1235 şi 16 obţinem 19760. Rezultatul final va fi 19,760 sau 19,76, deoarece zerourile din dreapta virgulei nu au efect asupra reprezentării zecimale a numărului fracţionar. În cazul împărţirii, extindem cifrele la dreapta ca şi în cazul adunării şi eliminăm virgulele.

Transformarea fractiilor ordinare in fractii zecimale

Sa luam un segment de 5 unitati si sa-l impartim in doua parti egale:




$$2\frac{1}{2} = 2\frac{5}{10} = 2{,}5$$

$$22 \div 4 = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} = 5\frac{5}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5$$

Cifrele de dupa virgula se numesc zecimale : prima cifra de dupa virgula reprezinta zecimile, a doua ,sutimile, a treia , miimile s.a.m.d.

Avem : $\mathbf{\frac{1}{10} = 0,1;}$ $\frac{1}{100} = 0{,}01;$ $\frac{1}{1000} = 0{,}001$

Astfel transformam o fractie ordinara in una zecimala prin impartirea numaratorului la numitor.

Transformarea fractiilor zecimale in fractii ordinare

Pentru a transforma o fractie zecimala finite in fractie ordinara, scriem cifrele numarului la numerator, iar la numitor se pune o putere a lui 10 cu exponentul egal cu numarul de zecimale.

$$14{,}2 = \frac{142}{10} = \frac{71}{5} \qquad 14{,}27 = \frac{1427}{100} \qquad 14{,}273 = \frac{14273}{1000}$$

Orice fractie zecimala periodica se poate transforma intr-o fractie zecimala:

$$0,(a) = \frac{a}{9} \qquad 0,(\overline{ab}) = \frac{\overline{ab}}{99} \qquad 0,(\overline{abc}) = \frac{\overline{abc}}{999}$$

$$0,(23) = \frac{23}{99} \qquad 0,(41) = \frac{41}{99} \qquad 0,(125) = \frac{125}{999}$$

Pentru a transforma o fractie zecimala periodica mixta in fractie ordinara , se scrie la numarator tot numarul, netinand cont de virgula si paranteza din care se scade numarul din fata perioadei ( tot netinand cont de virgula) iar la numitor se pun atatia de 9 cate cifre sunt in perioada urmati de atatia de 0 cate cifre sunt intre virgula si perioada.

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

$$3{,}1(2) = \frac{312 - 31}{90} = \frac{281}{90}$$

Sau pastram numarul intregilor si atunci avem :

$$3{,}1(2) = 3\frac{12 - 1}{90} = 3\ \frac{11}{90}$$

Scriem la numarator numarul de dupa virgula din care scadem neperioada, iar la numitor scriem atatia de 9 cate cifre are perioada urmati de atatia de 0 cate cifre sunt intre virgula si perioada”

## 2.4. Procente

Procentele întâlnite la tot pasul, în viaţa de zi cu zi, este o necesitate de prim ordin. Fără cunoaşterea exactă a unor noţiuni elementare din acest domeniu, diversele informaţii, care ne asaltează permanent, cu referire la domeniul bancar (dobânzi, rate), economic (productivitate, profit, impozite), social (populaţie, somaj, inflaţie) etc., nu pot fi interpretate în mod corespunzător.

Un caz particular de fracţii îl reprezintă procentele, care sunt utilizate pentru a reprezenta cât de mult contează o parte dintr-o unitate. De exemplu, vrem să ştim cât reprezintă o cantitate de 18 dintr-un total de 90. Pentru aceasta, împărţim 18 la 90 pentru a obţine procentul.

Notaţia obişnuită este *20%*. Este evident că orice număr din 100 reprezintă acel număr % din 100 : 33 reprezintă 33% din 100.

Calculele pot merge însă şi în sens invers, adică putem determina cât reprezintă p% dintr-un număr: 120% din 35 este:

$$120\%\ din\ 35 = \frac{120}{100}\ x\ 35 = \frac{120\ x\ 35}{100} = \frac{4200}{100} = 42$$

În cazul general

$$p\%\ din\ n\ = \frac{p}{100}\ x\ \ n = \frac{p\ x\ n}{100}$$

În schimb, determinarea procentului se face astfel:

$$P\% = \frac{x}{n}\ x\ 100\ \%$$

Aflarea unui numar cand se cunoaste p% din el: Intrucât există un număr necunoscut il vom nota cu x, obtinând $\frac{p}{100}$ ***din x = a***, ***a*** fiind dat, rezultă

$$x = \frac{a}{\frac{p}{100}} = a \cdot \frac{100}{p}$$

Aflarea raportului procentual:

pentru a afla cat la suta reprezinta numarul **a** din numarul **b**, ne folosim de relatia:

$$a = \frac{p}{100} \cdot b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{p}{100} \Rightarrow p = \frac{a \cdot 100}{b}$$

**Aplicații practice:**

***Aplicația nr. 1:*** Știind ca viteza maxima admisă pe autostrada este de 130 km/ora, să se afle daca un automobil ce ruleaza cu 90 km/ora poate să-și marească viteza cu 25%, fără a comite o contravenție.

***Aplicația nr. 2:*** Un motociclist trebuie sa parcurga distanta dintre 2 localitati in 3 etape: in prima 240 km, in a doua cu 25% mai mult, iar in a treia 60% din intreaga distanta. Să se afle viteza medie cu care a fost parcursa distanta, stiind rulajul a durat 18 ore .

***Aplicația nr. 3:*** In urma renegocierii contractului de munca, un salariat din sectorul privat a obtinut o crestere a salariului sau lunar, de la 2.500 lei la 2.750 lei.

Sa se calculeze ce reprezinta, in procente, aceasta schimbare.

***Aplicația nr. 4:*** Un functionar a obtinut, in urma unei reevaluari, o crestere salariala de 10%, salariul sau devenind astfel 1.540 lei. Sa se calculeze salariul anterior.

***Aplicația nr. 5:*** Stiind ca un depozit bancar in lei aduce o dobanda lunara de 6%, sa se calculeze castigul realizat dupa 3 luni, daca suma depusa este de 1.000 lei, iar dobanda dupa fiecare luna se adauga depozitului (depozitul este cu capitalizare).

***Aplicația nr. 6:***
Pretul unei anvelope de 120 lei se ieftineste cu 15%.
Cat costa anvelopa?

***Aplicația nr. 7:***
Acum calculeaza cat costa o scumpire cu 20% a anvelopei
Pretul anvelopei este de 120 lei.

***Aplicația nr. 8:***
S-a ridicat starea de urgenta si ai plecat pe un traseu de trei zile. In prima zi ai parcurs 30% din traseu, a doua zi ai parcurs doua cincimi din restul traseului iar a treia zi ai parcurs ultimi 42km ai traseului.

Ce lungime a avut traseul?

***Aplicația nr. 9:***
Din cei 24 colegi de la servici 18 au iesit sa manance la Moll. Cât la sută din colegii au fost în Moll?

## Rezolvare aplicații

***Rezolvare aplicatie nr. 1***

Răspuns:

Rezolvare: Aflăm cât reprezinta 25% din 90:

$90 \cdot 25\% = (90 \cdot 25)/100 = \ldots = (9 \cdot 5)/2 = 45/2 = 22{,}5$

(evident, 25% din 90 reprezinta un sfert din 90, deci 90 : 4 = 22,5). Aflam cat devine viteza: 90 km/ora + 22,5 km/ora = 112,5 km/ora.

Deci conducatorul automobilului nu risca sa fie amendat!

**Observatie:** Este posibila o rezolvare mai rapida si anume:

Calculam noua viteza afland cat reprezinta 125% din viteza de 90 km/ora:

$90 \cdot (125/100) = 90 \cdot (5/4) = (90 \cdot 5)/4 = (45 \cdot 5)/2 = 225/2 = 112{,}5.$

***Rezolvare aplicație nr. 2***

Răspuns: v = 75km/h.

Rezolvare: In a doua etapa au fost parcursi 240x(125/100) km = ... = 300 km.

In etapa a treia au fost parcursi dx(60/100) = ... = 3d/5 km, unde d reprezinta distanta.

Se obtine ecuatia 240 + 300 + 3d/5 = d, care, rezolvata, are solutia d = 1350 km .

Cunoscand distanta si timpul, aflam viteza : v = d : t < = > v = 1350 : 18 = > v = 75 km/h .

***Rezolvare aplicație nr. 3***

Răspuns: Cresterea salariului este de 10%

Rezolvare: Conform cunoscutei reguli de "trei simpla" avem:

2.500 lei .................... 2.750 lei

100 lei .................... x lei.

Marimile, fiind direct proportionale, avem:

x = (2.750 x 100)/2.500 = 275.000/2.500 = 2.750/25 = 110.

Deci s-a aplicat o crestere a salariului 10% (fiecare 100 lei "devine" 110 lei).

***Rezolvare aplicație nr. 4***

Răspuns: 1.400 lei.

Rezolvare: Notand cu x salariul anterior, noul salariu reprezinta 110% din x.

Deci: x · 110% = 1.540 = > x · 110/100 = 1.540 = > x = 1.540 : (110/100) =>

= > x = 1.540 · (100/110) = > x = 154.000/110 = > ... = > x = 1.400 lei.

***Rezolvare aplicație nr. 5***

Răspuns: 191,016 lei.

Rezolvare: Dupa 1 luna depozitul devine: 1.000 X 106% = 1.000 X 106/100 = 1060 lei;

Dupa 2 luni depozitul devine: 1.060 X 106% = 1.060 X 106/100 = 1.123,60 lei;

Dupa 3 luni depozitul devine: 1.123,60 X 106% = 1.123,60 X 106/100 = 1.191,016 lei.

Deci castigul realizat dupa 3 luni este de 191,016 lei.

Observatie:

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Calculul poate fi redactat si astfel: 1.000 X $(106/100)^3$ = (1.000 X $106^3$)/($100^3$) = ... = 1.191,016;

1.191,016 - 1.000 = 191,016 lei.

***Rezolvare aplicație nr. 6***

15% din 120 =$\frac{15}{100} \cdot 120 = \frac{15.120}{100} = 18$ lei

Pret total: 120-18 =102lei

***Rezolvare aplicație nr. 7***

20% din 120 =$\frac{20}{100} \cdot 120 = \frac{20\,.\,120}{100} = 24$ lei

Pret total: 120 + 24 =144lei

***Rezolvare aplicație nr. 8***

1 zi: 30% din $x\ = \frac{30}{100}x = \frac{3\,x}{10}$

2 zi: 2/5 x 70% din x = $\frac{2}{5}\,\frac{70}{100}$ x =$\frac{14\,x}{50}$

3 zi: 42km

X = $\frac{3\,x}{10}$ + $\frac{14\,x}{50}$ +42 => $\frac{50\,x}{50}$ = $\frac{15\,x}{50}$ + $\frac{14\,x}{50}$ + $\frac{2100}{50}$ => 50x = 15x + 14x +2100

50x = 29x + 2100

21x = 2100/21 => x = 100km

***Rezolvare aplicație nr. 9***

Cat la suta din 24 reprezinta 18

$$\frac{x}{100} \cdot 24 = 18 \Rightarrow \frac{24x}{100} = 18 \Rightarrow 24x = 1800 \Rightarrow x = 75$$

75% din colegi au fost la Mall

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

# Capitolul 3. NUMERE REALE

## 3.1. Pătratul unui număr, rădăcina pătrată

Numărul x se numeste pătrat perfect dacă există un număr întreg *a* cu proprietatea ca *x* = *a*2.

Numărul |a| se numește rădăcina pătrată a numărului x și se notează $\sqrt{x}$

Foarte important să știm că:

$\sqrt{a^2} = |a|$, iar pentru $a \geq 0$ avem $\sqrt{a^2} = a$.

Foarte important să știm că $\sqrt{a^2} = a$, când $a \geq 0$.

Nu există radical din numere negative. Valoarea unui radical nu poat fi negativă.

Exp: $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$ coform regulii de mai sus.

In caz particular, pentru ordinul 2, cel mai mic posibil în cazul unui radical avem: $\sqrt{x}$ (numit și rădăcina pătrată) se disting trei situații:

Dacă sub radical avem pătrate perfecte: 0; 1; 4; 9; 25... și în aceste situații radical din aceste numere sunt tot numere naturale.

Ex: $\sqrt{100} = 10$ , deoarece $10^2 = 100$

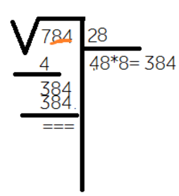
Dacă sub radical sunt numere pozitive care nu sunt pătrate pefecte, dar se pot descompune în factori primi. Acolo unde acești factori sunt câte 2, acest număr prim iese de sub radical.

Ex: $\sqrt{20} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

În cazul în care valoarea de sub radical nu se poate descompune (este număr prim) sau se descompune, dar termenii se regăsesc o singura dată, radicalii rămân asa cum sunt.

Ex: $\sqrt{30} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{30}$

Acum învățăm algoritmul de extragere a radicalilor, astfel începem printr-un exemplu ca să ințelegem mai usor:




Ca sa extragem radicalul alaturat:
-prima data grupam cifrele de la sfarsit spre inceput in grupe de cate 2, de unde obtinem grupa 84 si cifra 7 care fara pereche
-apoi la cifra 7 ne gandim la un patrat perfect apropiat de acesta, iar cel mai apropiat patrat este 4 adica 2 la puterea a doua si scadem din 7 si astfel obtinem restul 3
-apoi coboram si grupa pe care am format-o adica 84 langa rest, iar apoi radacina patrata 2 o dublam si obtinem 4, acum ne gandim ce cifra punem langa 4 care inmultita cu acest numar sa obtinem un numar apropiat de 384 sau chiar 384, in cazul nostru 8 este cifra potrivita dupa cum se observa.

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Exemple de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural pătrat perfect. Descompunem numărul în factori primi și scriem numărul ca putere (de 2 sau multiplii de 2). Baza puterii este radăcina pătrată.

$256 = 2^8=(2^4)^2 \Rightarrow \sqrt{256} = 2^4 = 16$

$144 = 2^4 \times 3^2 = (2^2 \times 3)^2 \Rightarrow \sqrt{144} = 2^2 \times 3 = 12$

$324 = 2^2 \times 3^4 = (2 \times 3^2)^2 \Rightarrow \sqrt{324} = 2 \times 3^2 = 18$

## 3.2. Ecuații liniare

Un sistem în care fiecare ecuație este de gradul 1 cu una sau mai multe necunoscute se numește sistem de ecuații liniare.

Un astfel de sistem poate avea o infinitate de soluții, o singură soluție sau niciuna, în funcție de coeficienții ecuațiilor, numărul lor, numărul necunoscutelor sau mulțimea în care se caută soluția.

Forma generală a unui sistem de două ecuații cu două necunoscute este:

$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$ unde a, b c, m, n, p apartin lui R.

Rezolvarea unui astfel de sistem se poate face, la primul nivel, prin două metode: cea a substituției sau cea a reducerii.

**Metoda substitutiei**

Această metodă constă în scoaterea din una din ecuații a unei necunoscute în funcție de cealaltă, introducerea acesteia în cea de-a doua ecuație a sistemului obținând astfel o ecuație de gradul întâi cu o singura necunoscută care, prin rezolvare, ne dă valoarea acestei necunoscute. Cu valoarea aflată se revine la prima ecuație și se determină cea de-a doua necunoscută.

Exemplu : $\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$

Rezolvare

$$\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 2x + y = -5 \end{cases} = \begin{cases} x = 3 + 5y \\ 2x + y = -5 \end{cases} = \begin{cases} x = 3 + 5y \\ 2(3 + 5y) + y = -5 \end{cases} = \begin{cases} x = 3 + 5y \\ 11y = -11 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x = 3 + 5y \\ y = -1 \end{cases} = \begin{cases} x = 3 + 5(-1) \\ y = -1 \end{cases} = \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Așadar, soluția sistemului este data de perechea (-2; - 1)

**Metoda reducerii**

Această metodă constă în înmulțirea termenilor ecuațiilor astfel încât prin adunarea sau scăderea egalităților obținute să se anuleze termenii ce conțin una dintre necunoscute. Se rezolvă apoi ecuația cu o singură necunoscută astfel obținută. Se înlocuiește valoarea necunoscutei aflate într-una dintre ecuațiile sistemului, se rezolvă ecuația, iar perechea obținută este soluția sistemului.

*Observație*: Dacă prin această metoda se anulează toți termenii ce conțin necunoscutele și termenii liberi, sistemul nu are soluție unică. Dacă se anulează toți termenii ce conțin necunoscutele și termenii liberi nu se anulează, sistemul nu are soluții.

UNIUNEA EUROPEANĂ

Instrumente Structurale
2014-2020

**Exemplu :** $\begin{cases} \boldsymbol{x - 5y = 3} \\ \boldsymbol{2x + \ y = -5} \end{cases}$

**Rezolvare:**

Prin înmulțirea celei de-a doua ecuații cu 5 se obține:

$\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 10x + 5\,y = -25 \end{cases}$

Adunând cele două ecuații se obține sistemul:

$\begin{cases} 11x = -22 \\ x - 5\,y = 3 \end{cases} = \begin{cases} x = -2 \\ -2 - 5\,y = 3 \end{cases} = \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

Exercitii

$\sqrt{24} - \sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6} = (2-1)\sqrt{6} = \sqrt{6}$

In acest exemplu am vrut să ajungem la un factor comun, în acest caz √6, pentru a simplifica expresia inițiala. Am observat ca 24 este alcătuit din 4 și din 6 și stim că 4 va ieși de sub radical.

$\sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{27} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 3} == 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{2} - \sqrt{3}$

În acest caz nu mai avem același număr sub radical pentru toti trei radicalii, dar e suficient pentru a scoate un factor comun doar pentru doi din ei și în final expresia să ajungă mai simplă.

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

**<u>Probleme simple a caror rezolvare conduce la ecuatii.</u>**

*Dintru-un siloz s-au scos $24\frac{1}{2}$ tone de cereale. In siloz au mai rămas $25\frac{1}{2}$ tone de cereale. Câte tone de cereale se aflau în siloz?

***Rezolvare:***

Notăm cu x numărul de cereale din siloz.

Avem:

$x - 24\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$

$x = 25\frac{1}{2} + 24\frac{1}{2}$

$x = \frac{51}{2} + \frac{49}{2}$

$x = \frac{100}{2}$

$x$ = 50 tone de cereale

---

*Un călător a parcurs 12 km, ceea ce reprezintă ¾ din lungimea unui drum . Să se afle lungimea drumului .

***Rezolvare:***

La ¾ corespund 12 $km$

La ¼ corespund 12 $km$ : 3 $= 12km\,\frac{1}{3}$

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

La 4/4 corespund $12km\ \frac{1}{3}$ 4 = $12\ km\ \frac{4}{3}$
Dar $12\ km\ \frac{4}{3} = 12km{:}\frac{3}{4} = 16\ km$
Deci lungimea drumului este de 16 km.
***Rezolvare sub forma de ecuatie :***
x km lungimea drumului.
Stim ca $\frac{3}{4}x = 12;\quad x = 12{:}\frac{4}{3};\qquad x = 16$
Deci lungimea drumului este de 16 km.

<u>**Aplicații practice**</u>

***Aplicatie nr. 1***

Sa luam urmatoarea situatie: Rares si Ioana sunt frati. Cu zece ani in urma, Rares avea de doua ori varsta Ioanei, si in 5 ani el va fi mai in varsta decat sora lui. Care este varsta celor doi frati acum?

***Aplicatie nr. 2***

Sa ne amintim problema discutata mai devreme, in care se solicita aflarea ratei dobanzii pentru un deposit de 2.500 lei. Sa presupunem ca știm doar suma de bani dupa 2 ani, aceasta fiind de 2.809 lei.

***Aplicatie nr. 3***

Determinați numărul natural „x” pentru care are loc egalitatea :
(320 + x) · 15 = 5100

***Aplicatie nr. 4***

Determinați numărul natural „x” pentru care are loc egalitatea:
[15 · (10 · x - 11 ) - 120 ] · 10 - 125 = 25

***Aplicatie nr. 5***

Aflati numarul necunoscut
15 — ( 8 + 4 x a) : 5 = 11

***Aplicatie nr. 6***

Determinați numărul natural „x”
12x + 10 = 4x +26

***Aplicatie nr. 7***

Rezolvati ecuatia

$$\frac{4}{x+9} = \frac{2}{x+2}$$

***Aplicatie nr. 8***

Rezolvati ecuatia liniara

y= x + 1

y= - x

***Aplicatie nr. 9***

Rezolvati ecuatia liniara

$x + y = 10$

$x - y = 4$

***<u>Rezolvare aplicații</u>***

***Rezolvare aplicație nr. 1***

Pentru a rezolva problema, notam cu x si y varsta celor doi frati. Astfel obtinem:

x-10=2 (y - 10)

x+5 = (y + 5) +5

Vom lucra la a doua ecuatie, unde pentru a defini necunoscuta x ca o operatie (i) care sa contina necunoscuta y. De aici rezulta:

x = y + 5 + 5 - 5 = y +5

Asadar formula obtinuta pentru x o putem inlocui in prima ecuatie.

y + 5 – 10 = 2y -20

De aici rezulta

-5 + 20, = 2 y – y

y = 15

Din moment ce y = 15 si x = y + 5 asa cum rezulta din cele de mai sus, rezultatul va fi: x = 20

***Rezolvare aplicație nr. 2***

In acest caz avem urmatoarele calcule:

$$2500\,\frac{p+100}{100}\cdot\frac{p+100}{100} = 2809$$

$$\left(\frac{p+100}{100}\right)^2 = \frac{2809}{2500}$$

$$(p+100)^2 = \frac{2809\cdot 100\cdot 100}{2500} = 11236$$

$$p + 100 = \sqrt{11236} = 106$$

$$p = 6$$

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

***Rezolvare aplicație nr. 3***

Primul pas: împărţim întreaga egalitate la 15

$(320 + x) \cdot 15 = 5100$ / $\underline{:15}$

$(320 + x) \cdot \underline{15 : 15} = \underline{5100 : 15}$

$\underline{(320 + x) \cdot 1} = 340$

Scădem numărul natural 320 din ambele părţi ale egalităţii

$320 + x = 340$ / $\underline{(-320})$

$\underline{320} + x \underline{- 320} = \underline{340 - 320}$

$x = 20$

***Rezolvare aplicație nr. 4***

Primul pas: adunăm în ambele părţi ale egalităţii pe 125.

$15 \cdot (10 \cdot x - 11) - 120] \cdot 10 - 125 = 25$ $\underline{/\ (+125)}$

$[15 \cdot (10 \cdot x - 11) - 120] \cdot 10 \underline{- 125 + 125} = \underline{25 + 125}$

$[15 \cdot (10 \cdot x - 11) - 120] \cdot 10 = 150$

Impărţim întreaga egalitate la 10.

$15 \cdot (10 \cdot x - 11) - 120] \cdot 10 = 150$ / $\underline{:10}$

$[15 \cdot (10 \cdot x - 11) - 120] \cdot \underline{10 : 10} = \underline{150 : 10}$

$[15 \cdot (10 \cdot x - 11) - 120] \underline{\cdot 1} = 15$

$15 \cdot (10 \cdot x - 11) - 120 = 15$

Adunăm în ambele părţi ale egalităţii pe 120

$15 \cdot (10 \cdot x - 11) - 120 = 15$ / $\underline{(+120})$

$15 \cdot (10 \cdot x - 11) \underline{- 120 + 120} = \underline{15 + 120}$

$15 \cdot (10 \cdot x - 11) = 135$

Impărţim în ambele părţi ale egalităţii cu 15.

$15 \cdot (10 \cdot x - 11) = 135$ / $\underline{:15}$

$\underline{15 \cdot} (10 \cdot x - 11) \underline{: 15} = \underline{135 : 15}$

$1 \cdot (\underline{10 \cdot x - 11}) = 9$

$10 \cdot x - 11 = 9$

Adunăm în ambele părţi ale egalităţii pe 11.

$10 \cdot x - 11 = 9$ / $\underline{(+11)}$

$10 \cdot x \underline{- 11 + 11} = \underline{9 + 11}$

$10 \cdot x = 20$

Impărţim în ambele părţi ale egalităţii cu 10.

$10 \cdot x = 20$ / $\underline{:10}$

$\underline{10 \cdot} x \underline{:10} = 20 \underline{:10}$

$x = 2$

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

***Rezolvare aplicație nr. 5***

( 8 + 4 x a) : 5 = 15 - 11
( 8 + 4 x a) : 5 = 4
8 + 4 x a = 4 x 5
8 + 4 x a = 20
4 x a = 20 - 8
4 x a = 12
a = 12 : 4
a = 3

***Rezolvare aplicație nr. 6***

12x + 10 = 4x + 26
12x - 4x = 26 - 10
8x =16
x= 16/8
x= 2

***Rezolvare aplicație nr. 7***

$$\frac{4}{x+9} = \frac{2}{x+2}$$

4(x + 4) = 2 (x+9)
4x+16=2x+18
4x-2x=18-16
2x=2
x=1

***Rezolvare aplicație nr. 8***

$y$ = x + 1
$y$ = - x
$y$ = $x$ + 1
$\underline{+\ y = -\ x}$
2 $y$ = 1

$$y = \frac{1}{2}$$

$y$ = - $x$

$$\frac{1}{2} = -x$$

$$-\frac{1}{2} = x$$

Solutii : $x = -\frac{1}{2}$ ; $y = \frac{1}{2}$

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

***Rezolvare aplicație nr. 9***

$x + y = 10$
$x - y = 4$

x + y – y = 10 - y
x = 10 - y
10 – y - y = 4
10 – 2 y = 4
10 - 2y -10 = 4 -10
-2y = - 6
y = 6/2 = 3
x= 10 - y
x=10 - 3
x= 7
y = 3,\ x = 7

# Capitolul 4. GEOMETRIE

## 4.1.Introducere, figuri geometrice

Matematica, in general, si geometria, in special, isi trag seva din viata cotidiana si isi gasesc apoi nenumarate aplicatii in viata cotidiana. Suntem inconjurati de forme geometrice iar geometria este o forma a creatiei. Geometria este una din ramurile principale ale matematicii, a luat nastere din necesitatile practice ale oamenilor ¸si s-a dezvoltat ın stransa legatura cu acestea.

Chiar fără a deschide vreodată o carte de geometrie, geometria este folosită zilnic de aproape toată lumea. Creierul face calcule spatiale geometrice pe masura ce pasim piciorul din pat in dimineata sau paralel parcam masina. Putem găsi geometria în artă, arhitectură, inginerie, robotică, astronomie, sculpturi, spațiu, natură, sport, mașini, mașini și multe altele.

Obiectivele intelegerii geometriei: să identifiam corpurile geometrice şi/sau a elementelor ce ne inconjoara, să putem reprezinta în plan corpurile geometrice, utilizînd instrumentele de desen, calculatorul, şi aplicarea reprezentărilor respective în rezolvări de probleme de calcul de arii şi/sau volume; să putem calcula ariile suprafeţelor şi/sau volumelor corpurilor geometrice în situaţii reale şi/sau modelate ; să analizam şi să interpreteze rezultatele obţinute prin rezolvarea unor probleme practice cu referire la corpurile geometrice şi la unităţile de măsură relevante ariilor, volumelor; să putem justifica rezultatul matematic obţinut sau indicat cu corpurile geometrice recurgînd la argumenări, demonstraţii; să construim unele secvenţe de raţionament deductiv, rezolvare a unor probleme de demonstraţie.

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

## 4.2. Lungimi

Cea mai simplă figură geometrică este ***segmentul***. Putem să ne imaginăm uşor un segment ca o bucată de sfoară, fixată la ambele capete. Segmentul este o parte dintr-o dreapta, limitata la ambele capete, numite extremitatile segmentului

Un segment:


Cea mai importantă caracteristcă a unui segment este lungimea sa. Din vreme ce orice distanţă intre două obiecte poate fi considerată un segment, cu marimi diferite, avem nevoie de o metodă de a măsura această lungime. Pentru aceasta, vom folosi o *riglă* dar in momentul actual lungimea se poate masura cu dispozitive diverse depinzand doar domeniul de utilizare.

*Distanta dintre cele doua puncte este lungimea segmentului*

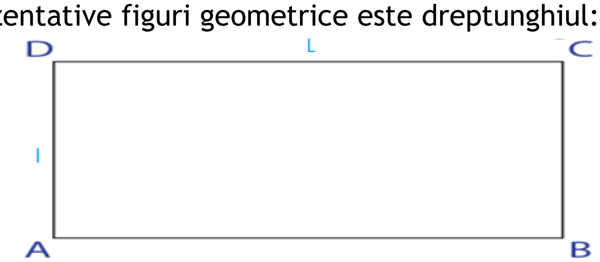

**Planul o alta figura geometrica**

Planul este o suprafata plana si neteda, nemarginita si fara grosime. Spre exemplu suprafata unui lac. Se reprezinta doar o parte din plan dar ne imaginam ca este nesfarsit.

Planul se noteaza de obicei cu o litera a alfabetului grecesc alfa, beta, delta, gama.

Pentru reprezentarea unui plan de obicei se foloseste un paralelogram.


Următorul pas în definirea figurilor geometrice este de a avea mai mult decât un segment. Una dintre cele mai reprezentative figuri geometrice este dreptunghiul:




Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Intalnim multe dreptunghiuri în viața reală – de la un covor la blatul din bucatarie la o bucată de hârtie, un câmp agricol, un zid, şi aşa mai departe.

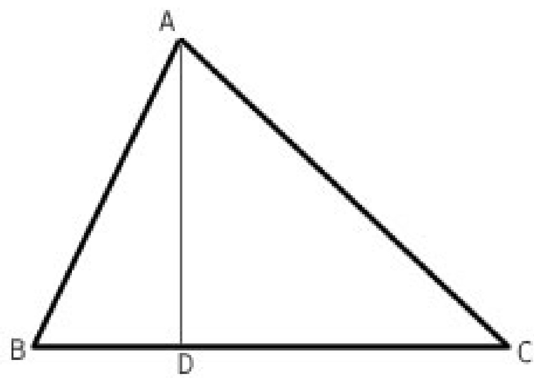
Să presupunem că avem o parcelă de pământ şi vrem să o ingrădim. Trebuie să ştim de câte scânduri de lemn avem nevoie pentru a face gardul. Mărimea care ne furnizează lungimea totală a gardului poartă numele de perimetrul parcelei (dreptunghiului) şi este egală cu suma laturilor sale.

O observaţie importantă este că, pentru un dreptunghi, laturile opuse sunt egale, astfel vom nota cu L lungimea celei mai lungi şi cu l lungimea celei mai scurte. Astfel, perimetrul este dat de suma laturilor

Dreptunghiul are lungime L=AB si latime l=BC

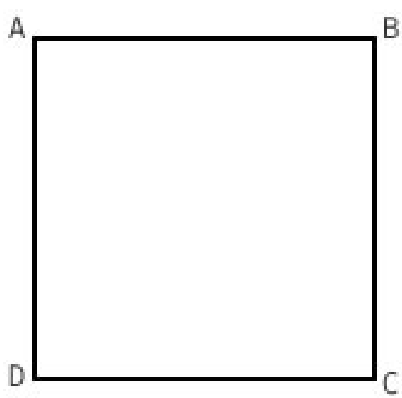
Perimetrul = suma tuturor laturilor, adica: P=AB+BC+CD+DA sau P=2(L+l)

Există şi alte tipuri de figuri geometrice care ne interesează, cea mai simplă fiind triunghiul:




Dacă un triunghi are două laturi egale, atunci se numeşte ***isoscel***, iar dacă toate laturile sunt egale, se numeşte ***echilateral***.

Perimetrul = suma tuturor laturilor, adică: P=AB+BC+CA



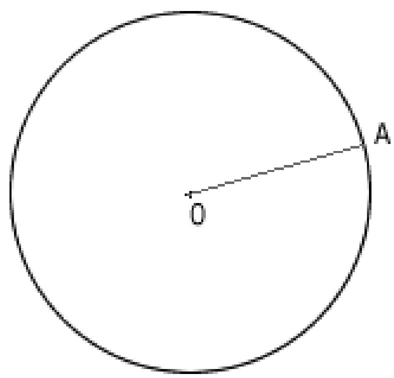
Patratul este un dreptunghi care are toate laturile egale (congruente), sau lungimea egală cu lațimea.

Perimetrul = suma tuturor laturilor, adică:

P= AB+BC+CD+DA sau P= 4 L,

unde L este latura pătratului (AB=BC=CD=DA=L).

CERCUL



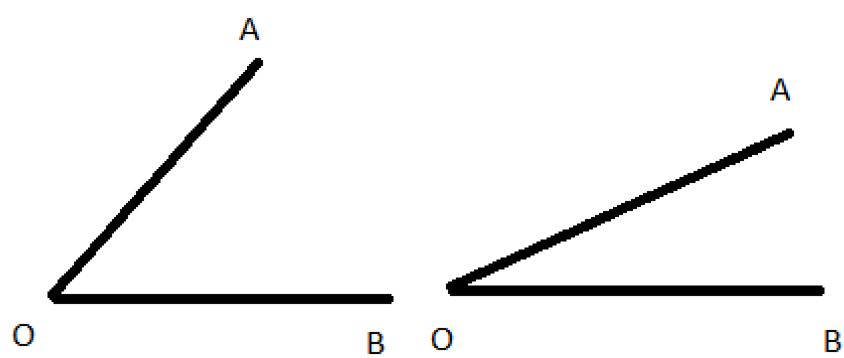

Avem OA - raza r

Lungimea cercului (circumferinta cercului):

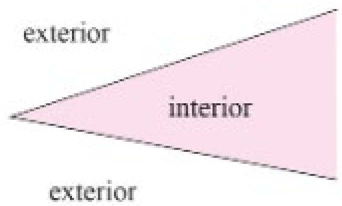
$L_{cerc} = 2 \pi r$

**Cap. 4.3 UNGHIURI**

Acum, să privim alăturarea de mai jos de segmente:



Putem observa că laturile au înclinări diferite în cele două triunghiuri. Dacă privim mai atent doar laturile din stânga, vom înțelege mai bine:

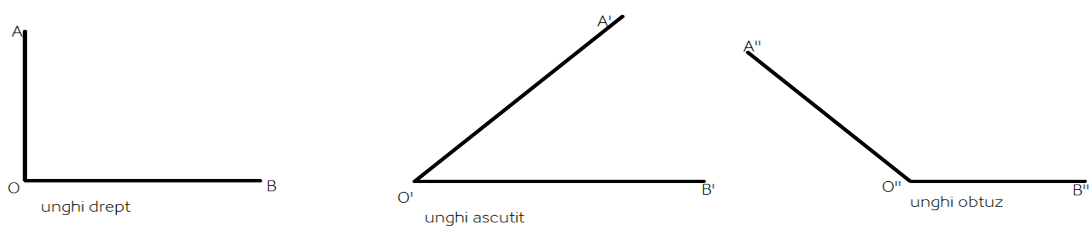



Unghiul reprezintă alăturarea a două semidrepte având originea comună sau un unghi (∠) este alcătuit dintr-un vârf (punct), două brațe (raze) și un arc. Acestea sunt aranjate astfel încât extremitatea comună a brațelor coincide cu vârful, iar arcul se construiește de la un braț la altul.

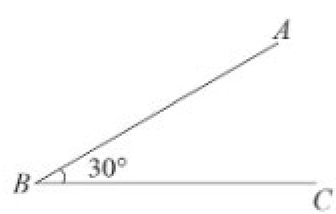
Dimensiunea unui unghi depinde de cât de mult sunt deschise brațele, Valoarea maximă posibilă se obține când două segmente sunt unul în continuarea celuilalt, unul la stânga, celălalt la dreapta. Valoarea minimă se obține când segmentele sunt unul peste altul.

Unghiurile se măsoară în grade, de la un minim de 0 grade până la un maxim de 180. Valoarea de mijloc, 90 grade, se obține când segmentul de sus este în poziție verticală, iar cel de jos este în poziție orizontală.

Exemple unghiuri:

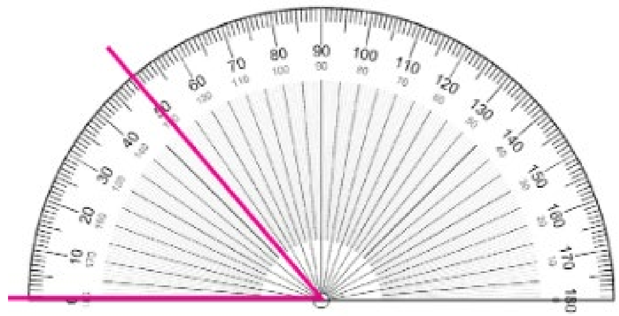



Notatie: $\widehat{ABC}$ citim unghiul ABC, unghiul determinat de semidreptele inchise [BA si [BC.




Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Se obţine acelaşi unghi dacă atârnăm o sfoară cu plumb la un capăt peste o suprafaţă orizontală. Unghiurile se măsoară cu următorul instrument numit raportor



Unitatea de masura pentru unghiuri este: gradul

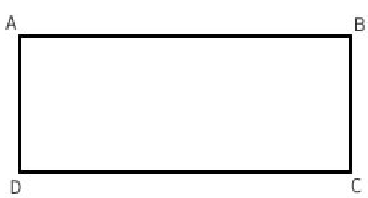
1grad =60 minute

Toate unghiurile unui dreptunghi au 90 grade. Un unghi de 90 de grade se numeşte un *unghi drept*.

## 4.4. Arii

Aria este măsura unei suprafete plane. Unitatea principala de măsura pentru arie este metrul pătrat și se notează cu $m^{2}$. Metrul patrat este aria unei suprafete cu latura de 1m. Să ne întoarcem la parcela dreptunghiulară de pământ şi să presupunem că vrem să ştim cât pământ cuprinde. Mărimea care ne dă răspunsul la întrebare este aria sau suprafaţa dreptunghiului. Să ne amintim că laturile opuse ale dreptunghiului sunt egale

<u>Dreptunghiul</u>

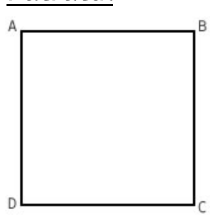



Dreptunghiul are lungime L=AB) și lățime l=BC.

Aria dreptunghiului = lungimea x lățimea

$A_{dreptunghi}$=L x l. In cazul nostru, AABCD=AB x BC.

<u>Patratul</u>



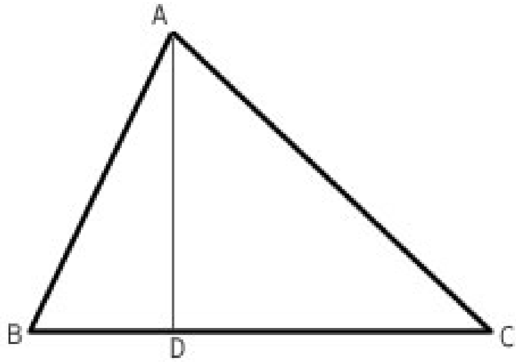

Pătratul este un dreptunghi care are toate laturile egale (congruente), sau lungimea egală cu lățimea.

Aria pătratului = latura x latura = latura$^2$, adică,

$A_{patrat} = L^2$

În cazul nostru, $A_{ABCD}=AB^2$.

Triunghiul



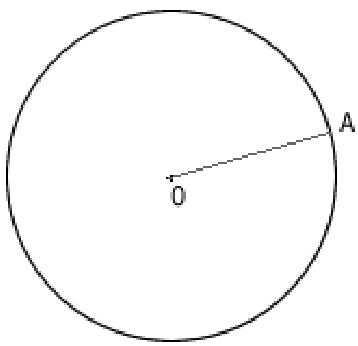

Aria triunghiului=(inaltimea x baza)/2, adica:

$A_{triunghi}$=(b x h)/2.

In cazul nostru, b=BC, iar h=AD. Deci,

$A_{ABC}=\frac{BCxAD}{2}$

Cercul




Avem OA - raza (not. r)
Lungimea cercului (circumferinta cercului):

$L_{cerc} = 2\pi \cdot r$

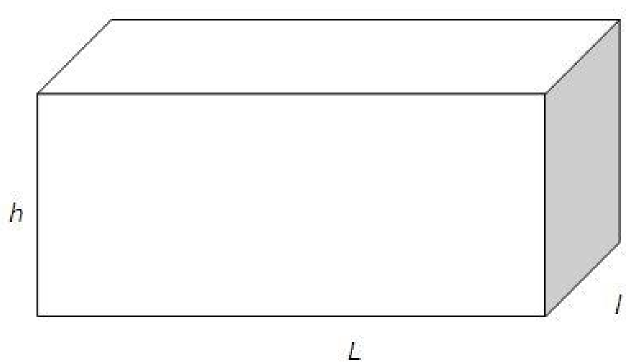
Aria cercului (corect ar fi aria discului):

$A_{cerc} = \pi \cdot r^2$

## 4.5. Volume

În viaţa reală întâlnim şi alte tipuri de obiecte, nu numai figurile menţionate până acum. De exemplu, o cărămidă nu este doar un dreptunghi, deoarece mai are o dimensiune care o defineşte:.

Volumul desemnează proprietatea unui corp de a avea tridimensionalitate, adică întindere




Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

de-a lungul a trei axe perpendiculare pe care se măsoară <u>lungimea</u>, <u>lăţimea</u> şi respectiv <u>înălţimea</u> sa (toate cele trei dimensiuni fiind, de fapt, valori de lungime). Altfel definit, volumul unui corp este locul pe care el îl ocupă în spaţiu.

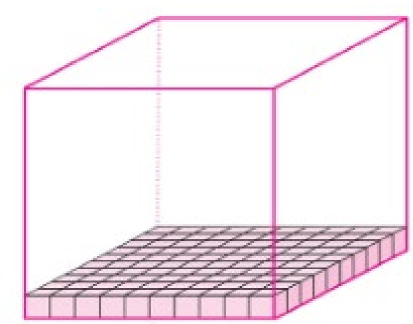
Figura se numeşte paralelipiped şi toaţe feţele sale sunt dreptunghiuri. Acesta este un corp tridimensional, adică are trei dimensiuni diferite, în comparaţie cu dreptunghiul, care are doar 2.

Cea de-a treia dimensiune este notată cu h şi se numeşte înălţimea obiectului. Putem calcula suprafaţa obiectului dacă adunăm toate suprafeţele sale, dar cea mai importantă mărime este ***volumul*.**

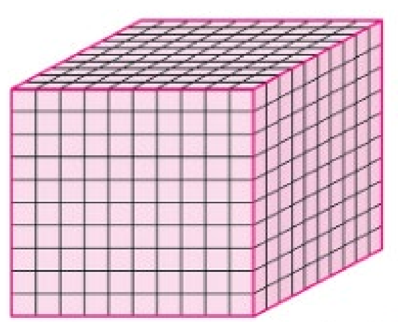
Cu alte cuvinte volumul reprezintă spaţiul pe care îl ocupă un corp, cu cât un corp este mai mare, cu atât spaţiul ocupat de el este mai mare.

Volumul sau dimensiunea unui corp.
Pentru a şti cât de mare sau mic este un corp(obiect) este nevoie sa ştim dimensiunile sale.
Acestea sunt: lungimea, lăţimea, înălţimea.

<u>Exemplu:</u>



Primul rând are 10 x 10 cuburi



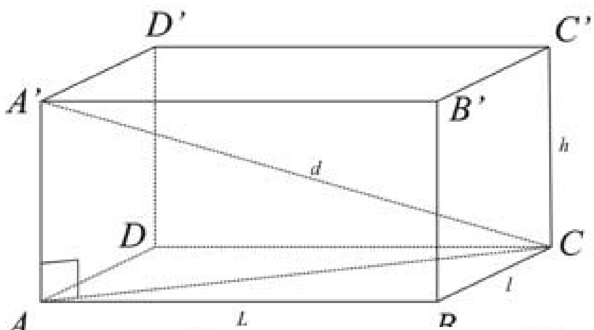
Cu alte cuvinte volumul este dat de cantitatea de cuburi:

10 rânduri a 100 cuburi
10 x 100 = 1000 cuburi – acesta este volumul căutat cu unitatea de măsura în acest caz *cub*.

Cum aflăm volumul la formele paralelipipedice:

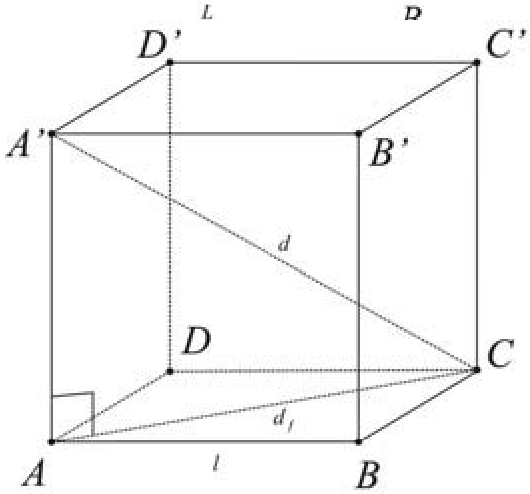
Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin
Programul Operaţional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toţi!
Titlul proiectului: Angajaţi competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

## Paralelipiped dreptunghic



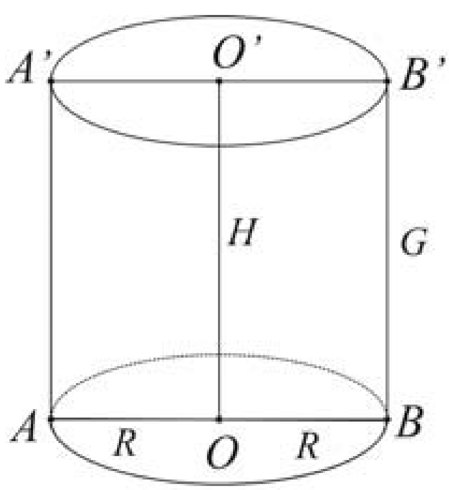

$$V = L \cdot l \cdot h$$
$$A_t = 2 \cdot (L \cdot l + L \cdot h + l \cdot h)$$

## Cubul




$$A_l = 4l^2$$
$$V = l^3$$
$$A_t = 6l^2$$

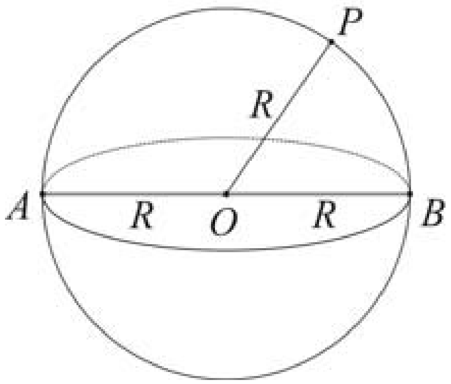
## Cilindrul




$$V = \pi r^2 h$$
$$A_l = 2\pi RG$$
$$A_t = 2\pi R(G + R)$$

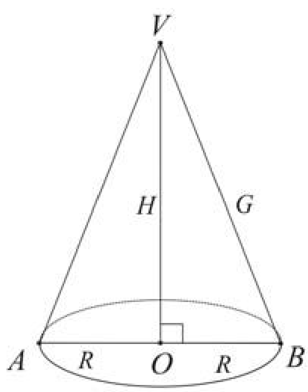
Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

## Sfera




$$A = 4\pi R^2$$
$$V = \frac{4\pi R^2}{3}$$

## Conul




$$V = \frac{4\pi R^2 H}{3}$$
$$A_l = \pi R G$$
$$A_t = \pi R(G + R)$$

## Exercitii:

Daca cubul Rubik are latura formata din 3 unitati de cate 2 cm cât este volumul cubului RubiK ?

Rezolvare

In acest caz latura cubului Rubic este 2cm + 2cm + 2cm = 6 cm

Volumul cubului este $l^3$

V= 216 $cm^3$

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

**<u>Aplicații practice:</u>**

***Aplicația nr. 1:***

Imparte unghiul unui triunghi cu masura de $53^0 14'$ in doua parti egale.

***Aplicația nr. 2:***

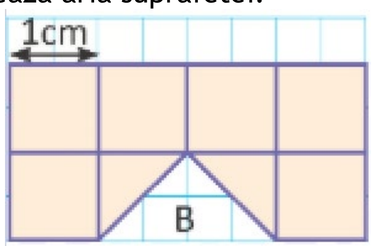
Transforma in grade $6720'$

***Aplicația nr. 3:***

Transforma in grade $7303'$

***Aplicația nr. 4:***

Calculeaza aria suprafetei:




***Aplicația nr. 5:***

Calculeaza volumul unui cub cu latura de 5cm.

***Aplicația nr. 6:***

De cati metri patrati de dale ai nevoie pentru a pava intrarea unui garaj cu lungimea de 5m si latimea de 3m

***Aplicația nr. 7:***

Un dreptunghi are aria egală cu 96 m2 și lungimea de 12 m. Aflați perimetrul unui pătrat având latura egală cu lățimea dreptunghiului.

***Aplicația nr. 8:***

Podeaua unei camere cu lungimea de 4 m și lățimea de 3 m trebuie acoperită cu parchet.

a) Aflați câte cutii de parchet trebuie cumpărate, știind că o cutie conține 1,5 m2 de parchet?

b) Calculați cât costă parchetul, știind că o cutie costă 33 lei?

***Aplicația nr. 9:***

O curte dreptunghiulară cu dimensiunile de 21 m și 65 m trebuie pavată cu plăci de beton în formă de pătrat cu latura de 50 cm. Aflați câte plăci de beton sunt necesare pentru a pava întreaga curte?

**<u>Rezolvare aplicații</u>**

***Rezolvare aplicatie nr. 1***

$53^0 14'$ | <u>2</u>
<u>40</u> ______ $26^0 37'$
13
<u>12</u>
=1=$60'$+$14'$=$74'$
<u>6</u>
14
<u>14</u>

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

***Rezolvare aplicatie nr. 2***

$\mathbf{6720':60 = 112^0}$

***Rezolvare aplicatie nr. 3***

$\mathbf{7303':60 = 121^0 43'}$

***Rezolvare aplicatie nr. 4***

$\boldsymbol{A = 6 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}$

***A =7cm2***

***Rezolvare aplicatie nr. 5***

$V = l^3 = 5^3 = 125cm^3$

***Rezolvare aplicatie nr. 6***

*A = L x l = 5 x 3 =15m2*

***Rezolvare aplicatie nr. 7***

Notăm cu L- lungimea dreptunghiului, cu *l*- lățimea dreptunghiului și cu *a* latura pătratului.
A = L·*l* = 12·*l* = 96 m2
*l* = 96:12 = 8 m
*a* = *l* = 8
P = 4·*a* = 4·8 = 32 m.

***Rezolvare aplicatie nr. 8***

a) Vom calcula aria podelei, adică aria unui dreptunghi cu L = 4 m și *l* = 3 m.
A = L·*l* =4·3 =12 m2
Aflăm câte cutii de parchet sunt necesare pentru a acoperi o suprafață de 12 metri pătrați:
12 : 1,5 = 120 : 15 = 8 cutii
b) Dacă o cutie de parchet costă 33 lei, 8 cutii vor costa
8·33 = 264 lei.

***Rezolvare aplicatie nr. 9***

Calculăm aria suprafeței care trebuie pavată:
Acurte = L·*l* = 65·21 = 1365 m2
Calculăm aria unei plăci de beton și transformăm rezultatul în metri pătrați:
Aplacă = *l*2 =502 =2500 cm2 = 0,25 m2
Calculăm câte plăci de beton sunt necesare pentru a acoperi curtea:
1365:0,25 =5460 plăci.

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

# Capitolul 5. UNITĂȚI DE MĂSURĂ, CALCULE ȘI SCALE

## 5.1. Lungimi

Am discutat despre lungime, arie și volum, dar până acum nu am discutat de unități de măsură. Prima unitate de măsură care va fi discutată este *metrul*. Toate lungimle sunt măsurate în metri și divizorii sau multiplii săi. Alte unități pentru lungime și echivalentul lor în metri sunt prezentate mai jos:

1 millimetru = 0.001 metri
1 centimetru = 0.01 metri
1 decimetru= 0.1 metri
1 kilometru = 1000 metri

Notăm aceste lungimi după cum urmează: 1 millimetru = 1 *mm*
1 centimetru = 1 *cm*
1 metru = 1 *m*
1 decimetru = 1 *dm*
1 kilometru = 1 *km*

De asemenea, avem: 1 m = 1000 mm
1 m = 100 cm
1 m = 10 dm
1 km = 1000 m

Să transformăm anumite valori dintr-o unitate de măsură în alta: câți centimetri reprezintă 13,24 metri?

$$13{,}24\ m = 13{,}24 \cdot 100\ cm = 1324\ cm$$

În decimetri obținem

$$13{,}24\ m = 13{,}24 \cdot 10\ dm = 132{,}4$$

În milimetri

$$13{,}24\ m = 13{,}24 \cdot 1000\ mm = 13240\ mm$$

Și în kilometri

$$13{,}24\ m = 13{,}24 \cdot 0{,}001\ km = 0{,}01324\ km$$

deoarece .

$$1\ m = \frac{1}{1000} km = 0{,}001\ km$$

## 5.2. Suprafețe

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Suprafetele sunt măsurate în pătrate ale unităţilor de măsură, adică metri pătraţi. Mai simplu, un metru pătrat este suprafaţa unui pătrat cu latura de 1 metru.

În afară de metri pătraţi, notaţi cu , avem următoarele unităţi de măsură:

1 square centimeter = 1.
1 square meter = 1
1 are = 1 100
1 hectare = 1 = 10000
1 square kilometer = 1 =1000000

Un ar este suprafaţa unui pătrat cu latura de 10 m, iar un hectar este aria unui pătrat cu latura de 100 metri.

De asemenea, avem $1\,km^2 = 100\,ha = 10000\,a$

Să transformăm din kilometri pătraţi în alte unităţi, după cum urmează:

$$144{,}2322\,km^2 = 144{,}2322 \cdot 100\,ha = 14423{,}22\,ha$$

$$144{,}2322\,km^2 = 144{,}2322 \cdot 10000\,a = 1442322\,a$$

$$144{,}2322\,km^2 = 144{,}2322 \cdot 1000000\,m^2 = 144232200\,m^2$$

**Cap. 5.3 VOLUME**

Unitatea standard pentru volum în sistemul metric este litrul. Un litru este egal cu 1000 centimetri cubi în volum, sau cu volumul unui cub cu latura de 10 cm. Aşadar

1 l = 1000 = 1 = 1000 *cc*

Alte unităţi pentru volum şi echivalentul lor în litri sunt: 1 mililitru = 0.001 liter
1 centilitru = 0.01 liter
1 decilitru = 0.1 liter
1 hectolitru = 100 liters
1 kilolitru = 1000 liters

Unitati de masura alternative sunt de metri cubi, centimetri cubi, iar conversiile sunt după cum urmează:

1 metru cub = 1 =1000 l= 1 kl
1 decimetru cub = 1 = 1 l
1 centimetru cub= 1 = 0,001 l = 1 ml

Pentru aceste unităţi, observăm că 1000 mililitri sunt egali cu 1 litru; astfel, 1 mililitru este egal cu 1 centimetru cub în volum. Aceste volume sunt reprezentate simbolic astfel:

1 milliliter = 1 *ml*
1 centiliter = 1 *cl*
1 deciliter = 1 *dl*

1 liter = 1 *l*
1 hectoliter =1 *hl*
1 kiloliter = 1 *kl*

Să calculăm volumul unui cub având laturile de 1,5 metri:

$$V = 1{,}5\ m \cdot 1{,}5\ m \cdot 1{,}5\ m = 3{,}375\ m^3 = 3{,}375 \cdot 1000\ l = 3375\ l$$

## 5.4. Masă

Unitatea de măsură standard în sistemul metric este gramul. Alte unități și echivalenții lor în grame sunt:

1 milligram = 0.001 gram
1 centigram = 0.01 gram
1 decigram = 0.1 gram
1 kilogram = 1000 grams

Reprezentăm aceste mase în mod simbolic astfel:
1 milligram = 1 *mg*
1 centigram = 1 *cg*
1 decigram = 1 *dg*
1 gram = 1 *g*
1 kilogram = 1 *kg*

Ca punct de referință, 1 gram este aproximativ masa unei agrafe. Un kilogram este aproximativ masa unui litru de apă.
Să transformăm 155 grame în alte unități:

$$155\ g = 155 \cdot 0{,}001\ kg = 0{,}155\ kg = 155 \cdot 1000\ mg = 155000\ mg$$

## 5.5. Timp

Unitatea de măsură de bază pentru timp este secunda, notată cu litera *s*. Alte unități de măsură sunt minutele, orele, zilele, săptămânile și anii.
Următoarele transformării sunt utile când lucrăm cu timpul:
1 minut = 60 secunde
1 oră = 60 minute = 3600 secunde
1 zi = 24 ore
1 săptămână = 7 zile
1 an = 365 1/4 zile (pentru ca Pământul să aibă o rezoluție completă în jurul Soarelui)  În practică, în trei ani calendaristici consecutivi , anul va avea 365 de zile, iar odată la patru ani vom avea an bisect, cu 366 de zile, pentru a compensa sfertul de zi adunat în plus pe parcursul a patru

ani. Anii 1992, 1996, 2000 şi 2004 sunt ani bisecţi. Obţinem un total de 52 săptămâni complete şi încă o zi (sau 2 într-un an bisect).

Anul este împărţit în 12 luni, fiecare având 30 sau 31 de zile, cu excepţia lui februarie, care are 28 zile (sau 29 într-un an bisect).

Să calculăm câte secunde sunt în 3 ore:
$3h = 3 \cdot 60\ m = 180\ m = 180 \cdot 60\ s = 10800\ s$

şi câte ore în 2 săptămâni şi 3 zile:
$2\ weeks = 2 \cdot 7\ days = 14\ days$

astfel, 2 săptămâni şi trei zile vor avea
$17\ days = 17 \cdot 24\ h = 408\ h$

**Temperatură**

Temperatura este exprimată în grade Celsius în sistemul metric. Punctul de fierbere al apei (la nivelu mării) este 100°Celsius, sau 100°*C*. Punctul de îngheţ al apei (la nivelul mării) este 0° Celsius. Într-o zi călduroasă sunt aproximativ 30° Celsius.

**Zecimale în măsurare**

Utilizăm zecimalele pentru a specifica unităţi de măsură când avem nevoie de precizie cu privire la lungime, volum, masă sau timp. De exemplu, când specificăm înălţimea unei persoane de 1,63 metri, dacă spunem că acea persoană are 1 sau 2 metri nu avem o aproximare prea bună a înălţimii reale a acelei persoane.

Prefixele pentru diferite unităţi de măsură ale lungimii, volumului şi masei în sistemul metric respectă următoarele reguli:

| Prefix | Înmulţire cu |
|---|---|
| milli- | 0.001 |
| centi- | 0.01 |
| deci- | 0.1 |
| deca- | 10 |
| hecto- | 100 |
| kilo- | 1000 |

De exemplu:
1 *h*ectometru = 100 metri
1 *c*entigram = 0.01 gram
3 *m*illilitri = 3 × (0.001 litri) = 0.003 litri
0.9 *k*ilometri = 0.9 × (1000 metri) = 900 metri

**Aplicaţii practice:**

Proiect cofinanţat din Fondul Social European prin
Programul Operaţional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toţi!
Titlul proiectului: Angajaţi competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

***Aplicația nr. 1***: Intr-un vas cu de forma paralelipiped dreptunghic cu L=25 cm, l=15cm, si h=18 cm avem 3,75litri apa

Vasul este plin ?

***Aplicația nr. 2:***

Calculați volumul unui cub cu muchia de 5 dm.

***Aplicația nr. 3:***

Calculați volumul unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 6 cm, lățimea de 4 cm și înălțimea egală cu media aritmetică dintre lungime și lățime.

***Aplicația nr. 4:***

Aflați perimetrul unui pătrat cu latura de 3 dm.

***Aplicația nr. 5:***

Aflați perimetrul unui dreptunghi cu lățimea de 4 cm și lungimea cu 3 mai mare decât lățimea.

***Aplicația nr. 6:***

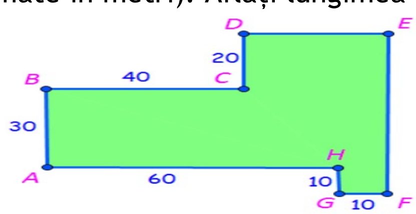
Aflați latura unui pătrat cu perimetrul de 22 cm.

***Aplicația nr. 7:***

Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 18 cm. Aflați lungimea și lățimea dreptunghiului, știind că lungimea este de două ori mai mare decât lățimea.

***Aplicația nr. 8:***

În figura de mai jos este schița unei grădini care trebuie împrejmuită cu un gard (lungimile sunt exprimate în metri). Aflați lungimea gardului .




***Aplicația nr. 9:***

Un con circular drept are perimetrul secțiunii axiale de 36 cm, iar raza cercului de la bază este de 5 cm. Aflați: aria latelară, aria totală a conului.

<u>**Rezolvare aplicații**</u>

***Rezolvare aplicație nr. 1:***

*3,75 l= 3,75dm$^2$ =3750 cm*

*Apa ara forma unui paralelipiped dreptunghic cu cu L=25 cm, l=15cm, si h=18 cm, trebuie sa aflam inaltimea apei*

$V_{paralelipiped}$ *= L x l x h =*

*3750 = 25 x 15 x h*

*h= 10 cm*

Deci vasul nu este plin

***Rezolvare aplicație nr. 2:***

V = 53 = 125 dm3.

***Rezolvare aplicație nr. 3:***

Calculăm volumul în cm3 , apoi îl transformăm în dm3 și ținem cont de faptul că un litru este egal cu un decimetru cub.

V = 60·70·80 = 336000 cm3 = 336000:1000 dm3 = 336 dm3 = 336

***Rezolvare aplicație nr. 4:***

P = 4· l = 4·3 = 12 dm.

***Rezolvare aplicație nr. 5:***

l = 4 cm

L = 3+l = 3+4 = 7 cm

P = 2·(L+l) = 2·(7+4) = 2·11 = 22 cm.

***Rezolvare aplicație nr. 6:***

P = 4·l = 22

l = 22:4 = 5,5 cm

***Rezolvare aplicație nr. 7:***

L = 2·l

P = 2·(L+l) = 2·(2·l+l) = 2·3·l= 6·l =18

l = 18:6 = 3 cm

L = 2·l = 2·3 = 6 cm.

***Rezolvare aplicație nr. 8:***

AH = 60 m

AR = BC = 40 m, de aici putem deduce că RH = AH - AR = 60 - 40 = 20 m

DM = RH = 20 m

GF = HP = ME = 10 m

DE = DM + ME = 20 + 10 = 30 m

EN = DC = 20 m

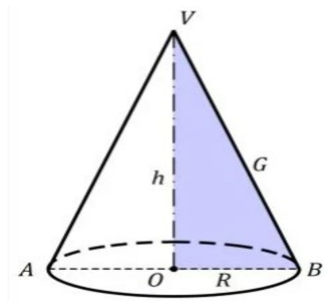
NP = BA = 30 m

PF = HG = 10 m

EF = EN + NP + PF = 20 + 30 + 10 = 60 m
Am aflat DE și EF, iar acum putem afla perimetrul grădinii:
P = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA
P = 30 + 40 + 20 + 30 + 60 + 10 + 10 + 60 = 260 m
Gardul va avea o lungime de 260 m.

***Rezolvare aplicație nr. 9:***

Secțiunea axială este triunghiul (isoscel) VAB având perimetrul
P = 36 cm.
Știm că R = OB = 5 cm, prin urmare AB = AO + OB = 5 + 5 = 10 cm.
P = VA + VB + AB = 2VB + AB = 2G + 10 = 36 cm
2G + 10 = 36
2G = 36 – 10 = 26
G = 26:2 = 13 cm.
Al = $\pi$RG = $\pi$5·13 = 65$\pi$ cm2
At = $\pi$R(G+R) = $\pi$·5·(13+5) = 90$\pi$ cm2




## Capitolul 6. CALCUL ȘI ESTIMARE

### 6.1. Media aritmetica

Să presupunem că avem rezultatele şcolare ale unui elev de liceu şi suntem interesaţi de notele obţinute la matematică, fizică, informatică, chimie şi geografie.

Notele au valori cuprinse între 1 şi 10, iar pentru fiecare dintre domeniile de mai sus elevul are 4 evaluări.

Notele sunt prezentate în tabelul de mai jos:

| | Matematică | Fizică | Informatică | Chimie | Geografie |
|---|---|---|---|---|---|
| nota 1 | 8 | 7 | 6 | 6 | 9 |
| nota a 2-a | 9 | 9 | 8 | 8 | 10 |
| nota a 3-a | 9 | 8 | 10 | 9 | 9 |
| nota a 4-a | 10 | 8 | 10 | 8 | 10 |

Să presupunem că vrem să evaluăm activitatea la matematică, dar cum putem face asta? Avem 4 note şi trebuie să le combinăm pentru a obţine o singură valoare. Dacă le adunăm obţinem o valoare mai mare decât 10 care nu este foarte relevantă dacă nu specificăm că valoarea maximă este 40. O modalitate de a evita această situaţie este împărţirea sumei la numărul total de note, adică să facem o medie.

Matematica $_{\text{medie}} = \frac{8+9+9+10}{4} = \frac{36}{4} = 9$

Valoarea obţinută este între 1 şi 10 şi este relevantă pentru evaluarea performanţelor elevului la matematică.

In acelaşi mod vom evalua media pentru fizică.

Fizica $_{\text{medie}} = \frac{7+9+8+8}{4} = \frac{32}{4} = 8$

Până acum valorile ţinute sunt întregi, dar nu întotdeauna se întamplă acest lucru:

Informatica $_{\text{medie}} = \frac{6+8+10+10}{4} = \frac{34}{4} = 8{,}5$

Ceea ce reprezintă un număr raţional.

În general, formula pentru medie sau media aritmetică a două numere se defineşte ca:

Media $_{\text{aritmetica}} = \frac{a1+a2}{2}$

Media $_{\text{aritmetica}} = \frac{Suma\ tuturor\ notelor\ la\ disciplina}{numarul\ de\ note}$

Pentru trei şi patru numere avem:

Media $_{\text{aritmetica}} = \frac{a1+a2+a3}{3}$

Media $_{\text{aritmetica}} = \frac{a1+a2+a3+a4}{4}$

Pentru *n* numere formula este:

Medie $_n := \frac{a1+a2+a3\dots+an}{n}$

Adică adunăm toate numerele şi apoi împărţim la câte numere sunt. Pentru celelalte două discipline avem:

Chimie $_{\text{medie}} = \frac{6+8+9+8}{4} = \frac{31}{4} = 7{,}75$

Geografie $_{\text{medie}} = \frac{9+10+9+10}{4} = \frac{38}{4} = 9{,}5$

## 6.2. Media ponderată

Să presupunem acum că vrem să calculăm un fel de punctaj pentru a evalua abilităţile elevului la ştiinţele exacte, dar suntem de părere că matematica este puţin mai importantă decât chimia sau fizica. Aşadar, vom dori să asociem o importanţă mai mare sau o pondere mai mare matematicii şi una mai mică chimiei. Presupunând că întregul punctaj este o unitate, ne vom imagina că notele la matematică vor avea o importanţă de 50%, în timp ce informatica va avea 30%

şi fizica şi chimia vor avea fiecare o importanţă de 10%.

Amintim mediile pentru fiecare:

| Domeniu | Mathematică | Fizică | Informatică | Chimie |
|---|---|---|---|---|
| Medie | 9 | 8 | 8,5 | 7,75 |

Punctajul va fi evaluat în modul următor:

Media $_{ponderata}$ = $50\% \cdot 9$

$M_p$= $50\% \cdot 9 + 10\% \cdot 8 + 30\% \cdot 8{,}5 + 10\% \cdot 7{,}75$

$= \frac{50 \cdot 9}{100} + \frac{10 \cdot 8}{100} + \frac{30 \cdot 8{,}5}{100} + \frac{10 \cdot 7{,}75}{100}$

$= \frac{450+80+225+77{,}5}{100} = \frac{862{,}5}{100} = 8{,}625$

Numim valoarea de mai sus: media ponderată, cu ponderile 50%, 10%, 30% şi respectiv 10%. Adunate, ponderile fac 100%. Un alt mod de a defini ponderile este prin numere fracţionare, care adunate fac 1, de exemplu: adunate fac exact unu:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{5}{10} = \frac{10}{20} + \frac{10}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

Media ponderată corespunzătoare este calculată în felul următor:

media ponderată = $w_1$ x $a_1$ + $w_2$ x $a_2$ + ... + $w_n$ x $a_n$

aşa cum am observat mai sus, ponderile pot fi procentaje, din vreme ce
$p\,\% = \frac{p}{100}$

Să calculăm acum o altă medie ponderată, pentru numerele 130, 240, 100, 220 şi 300 cu ponderile observăm că:

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1+3+1+3+2}{10} = \frac{10}{10}$$

şi media ponderată este

$$\frac{1}{10} \cdot 130 + \frac{3}{10} \cdot 240 + \frac{1}{10} \cdot 100 + \frac{3}{10} \cdot 220 + \frac{2}{10} \cdot 300 = \frac{130+720+100+660+600}{10} = \frac{2210}{10} = 221$$

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

Observăm că media (media aritmetică) definită anterior este o medie ponderată cu toate ponderile $\frac{1}{n}$

**Aplicatii practice**

***Aplicația nr. 1:*** Am cumpărat 2 kg de portocale cu 4 lei/kg şi 3 kg de mandarine cu 5 lei/kg.

Care este preţul mediu (media aritmetica ponderata) a unui kilogram de fructe?

***Aplicația nr. 2***: Avem numerele 10, 20, 30, 10, 20 şi 10. Sa se afle media aritmetica. Sa se afle media aritmetica ponderata.

***Aplicația nr. 3:*** Se dau numerele 10, 20 şi 30, cu ponderile 4, 5 şi 6. Să se calculeze media ponderată.

***Aplicația nr. 4:*** Ai cumparat de la Dedeman Deva 2 pensule de vopsea cu pretul de 3,2 lei si 3 mari la 4,8 lei bucata. Aflati pretul mediu platit pentru o pensula.

***Aplicația nr. 5:*** Pretul unui bilet de transport pe ruta Deva – Simeria costa la 5 firme diferite: 30lei, 29lei, 33lei, 31lei respectiv 27 lei. Care este pretul mediu unui bilet pe ruta Deva – Simeria?

***Aplicația nr. 6***: Media aritmetică a trei numere este 8. Aflaţi numerele, ştiind că al doilea este de două ori mai mare decât primul, iar al treilea este cu 4 mai mic decât al doilea..

***Aplicația nr. 7***:

Situaţia notelor obţinute de elevii unei clase la un test este următoarea: 2 elevi cu nota 10, 3 elevi cu nota 9, 6 elevi cu nota 8, 6 elevi cu nota 7, 5 elevi cu nota 6, 1 elev cu nota 5, 2 elevi cu nota 4. a. Calculati media clasei la acest test? b. Ce nota ar fi trebuit sa obţină elevii cu nota 4, pentru ca media clasei sa fie 7, 60?

***Aplicația nr. 8*** :

Sa se afle media aritmetica a numerelor rationale $\frac{4}{3}$ si $\frac{5}{8}$

***Aplicația nr. 9***:

Sa se afle media aritmetica a numerelor rationale $\frac{4}{3}$ , $\frac{5}{8}$ si $\frac{2}{3}$

**Rezolvare aplicații practice**

***Rezolvare aplicație nr. 1***

A). Să stabilim care sunt numerele reale a1 şi a2 :

Numerele reale sunt preţul/kg a fiecărui fruct:

$a1$ = 4 lei/kg (portocale), respectiv $a2$ = 5 lei/kg (mandarine).

B). Să stabilim care sunt ponderile, p1 si p2.

Ponderile în problema noastra sunt numerele care reprezinta numărul de kilograme a fiecărui fruct:

p1 = 2 kg portocale și p2 = 3kg mandarine

C). Aplicăm formula și înlocuim numerele *a* și *p*:

$M_{ap}$=(a1Xp1 + a2Xp2) / (p1+p2)
(4 X 2 + 5 x 3)/ (2 + 3) = 23/5 = 4,6lei/kg
deci preţul mediu (media aritmetica ponderata) este de 4,6 lei/kg.

***Rezolvare aplicație nr. 2***

A). Până acum știam să calculăm media aritmetică a numerelor astfel: adunam numerele

(10 + 20 + 30 + 10 + 20 + 10), le împărțeam la numărul lor (6) și obțineam media aritmetică:

$$\frac{10 + 20 + 30 + 10 + 20 + 10}{6} = \frac{100}{6}$$

B). Media aritmetică ponderată simplifică acest calcul. Mai întâi stabilim ponderea fiecărui număr: avem 3 numere de 10, 2 numere de 20 și doar unul de 30; așadar ponderile sunt aceste numere găsite 3, 2 și 1. Numărătorul devine conform formulei de mai sus:

(3·10 + 2·20 + 1·30).

Numitorul, tot conform formulei de mai sus, este suma ponderilor, adică (3 + 2 + 1).
Iată acum media aritmetică ponderată: $\frac{3\cdot10 + 2\cdot20 + 1\cdot30}{3+2+1} = \frac{100}{6}$

***Rezolvare aplicație nr. 3***

$M_{ponderata}$ (10,20,30/4,5,6) = ?

$M_{ponderata}$ = (4 ·10 + 5 · 20 + 6 · 30) / (4 + 5 + 6) = 320 / 15

***Rezolvare aplicație nr. 4***

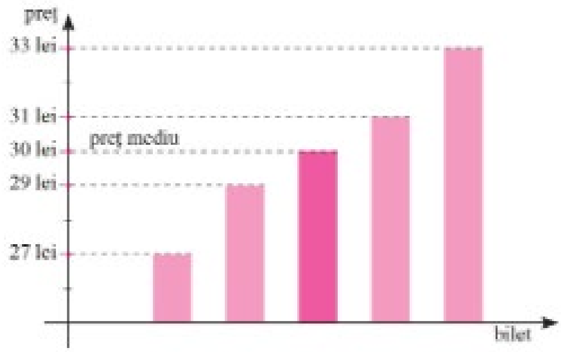
| | |
|---|---|
| 2 pensule mici – 3,2 lei / buc | x1 = 3,2 / p1 = 2 |
| 3 pensule mari – 4,8 lei / buc | x2 = 4,8 / p2 = 3 |

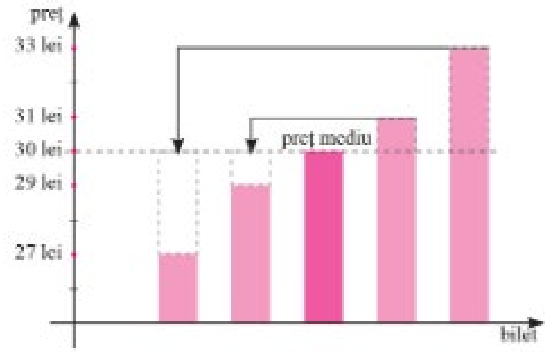
$M_{ap} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2}{p_1 + p_2} = \frac{3{,}2\cdot2 + 4{,}8\cdot3}{2+3} = \frac{6{,}4+14{,}4}{5} = \frac{20}{8} = 4{,}16$ lei

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

***Rezolvare aplicație nr. 5***

Prețul mediu este de 30 lei. Pentru a înțelege prețul mediu, reprezentăm datele în diagramă.

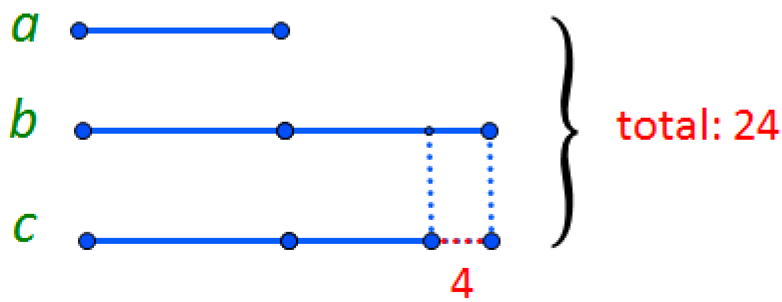



***Rezolvare aplicație nr. 6***

Vom rezolva problema prin metoda grafică. Notăm cele trei numere necunoscute cu a, b și c. Dacă media aritmetică este 8, atunci putem afla suma lor:

(a + b + c): 3=8
a + b + c = 8 · 3 = 24




Dacă ultimul număr ar fi cu 4 mai mare, atunci am obține cinci segmente egale, iar suma lor ar fi 24+4 = 28.

Atunci un segment este
28 : 5 = 5,6.
Am obținut astfel că
a = 5,6
b = 2·a = 2·5,6 = 11,2
c = b-4 = 11,2-4 = 7,2

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211

***Rezolvare aplicație nr. 7***

Media$_{pondarata}$ = $\frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 p_2 + \cdots a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \cdots p_n}$

Inlocuim in problema:
Notele: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4
Ponderile: 2, 3, 6, 6, 5, 1, 2.

Mp= $\frac{10 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{2+3+6+6+5+1+2}$

Notam cu x nota celor 2 elevi care luasera 4. Si formula se scrie asa:

Mp= $\frac{10 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + x \cdot 2}{2+3+6+6+5+1+2} = \frac{172+2x}{25}$

$\frac{172+2x}{25}$ =7,6 => 172 +2X =190

2X = 18

X= 9

Deci cei doi care luasera nota 4 ar fi trebuit sa ia note de 9 ca sa creasca media clasei la 7,60

***Rezolvare aplicație nr. 8:***

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{8} = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{4 \cdot 8 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 8} = \frac{32 + 15}{24} = \frac{47}{24}$$

$$\frac{47}{24} : 2 = \frac{47}{24} \cdot \frac{1}{2} = \frac{47}{48}$$

***Rezolvare aplicație nr. 9:***

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{8} + \frac{2}{3} = \frac{47}{24} + \frac{2}{3} = \frac{47}{24} + \frac{16}{24} = \frac{47+16}{24} = \frac{63}{24} = \frac{21}{8}$$

$$\frac{21}{8} : 3 = \frac{21}{8} \frac{1}{3} = \frac{7}{8}$$

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin
Programul Operațional Capital Uman 2014 - 2020
Axa prioritară 3: Locuri de muncă pentru toți!
Titlul proiectului: Angajați competitivi în Regiunea Vest
Cod proiect: POCU/464/3/12/128211